ANALYSIS II

Hausaufgaben (Bearbeitung bis 05.06.2014)

H 9.1 *Metriken in $\mathbb{R}^2$*

Zeigen Sie, dass die gegebenen Funktionen jeweils eine Metrik auf $\mathbb{R}^2$ definieren! Wie sieht die Einheitskugel in der jeweiligen Metrik um einen allgemeinen Punkt $x \in \mathbb{R}^2$ aus? Geben Sie auch eine Skizze an!

a) $d_1(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$

b) Wir sagen, dass zwei Punkte „auf einem Strahl" liegen, wenn sie bezüglich des Ursprungs denselben Winkel zur x-Achse einschließen. Genauer, für $x \neq 0 \neq y$, wenn $\frac{1}{\|x\|_2}x = \frac{1}{\|y\|_2}y$. Der Ursprung liegt auf einem Strahl mit jedem beliebigen Punkt.

Damit definieren wir die sogenannte „Paris-Metrik":

$$d_p(x, y) = \begin{cases} \|x - y\|_2 & \text{falls } x \text{ und } y \text{ auf einem Strahl liegen,} \\ \|x\|_2 + \|y\|_2 & \text{sonst.} \end{cases}$$

H 9.2 *Abgeschlossene Mengen und Konvergenz gezüglich Metriken*

Beweisen Sie Lemma 2c aus Kapitel 11.2 der Vorlesung: Sei (X, d) ein metrischer Raum, $M \subset X$ und $a \in X$. Dann ist M genau dann abgeschlossen, wenn für jede (in X) konvergente Folge $(a_n) \subset M$ auch ihr Grenzwert in M liegt.

H 9.3 *Supremumsnorm auf kompakten Mengen*

Sei $\emptyset \neq D \subset \mathbb{C}$, D kompakt und $C(D)$ die Menge der stetigen Funktionen $D \to \mathbb{C}$. Wir definieren $d(f, g) = \|f - g\|_D$ für $f, g \in C(D)$. Zeigen Sie, dass $(C(D), d)$ ein metrischer Raum ist! Ist dieser Raum vollständig?

H 9.4 *Stetigkeit des Integrals*

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall und A die Menge aller Regelfunktionen $I \to \mathbb{R}$. Dann können wir $d(f, g) = \|f - g\|_I$ definieren, so dass (A, d) ein metrischer Raum ist (warum?). Ist die Abbildung $\mathcal{I} : A \to \mathbb{R}$ mit

$$\mathcal{I}(f) = \int_I f(x)\,dx$$

stetig oder sogar Lipschitz-stetig als Abbildung von diesem Raum nach $(\mathbb{R}, |\cdot|)$?

H 9.5 *Stetigkeit von Funktionen mehrerer Variablen I*

Für $x, y \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$ definieren wir

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{\sin(x - y)} & \text{für } x \neq y, \\ 0 & \text{für } x = y. \end{cases}$$

Ist f als Funktion $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$ im Punkt $(0, 0)$ stetig?

H 9.6 *Paris-Metrik* **(Zusatzaufgabe, außer Wertung)**

Wir betrachten wieder d_p aus Aufgabe 11b. Wenn wir $x \in \mathbb{R}^2$ fixieren, definiert $d_x(y) = d_p(x, y)$ eine Funktion $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Stellen Sie für beliebiges $x \in \mathbb{R}^2$ fest, in welchen Punkten (wenn überhaupt) d_x in Bezug auf die folgenden metrischen Räume stetig ist!

Hinweis: Für jede Metrik gilt die „umgekehrte Dreiecksungleichung":

$$d(x, y) \geqslant |d(x, z) - d(z, y)|$$

a) $(\mathbb{R}^2, d_p) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$

b) $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$