ANALYSIS II

Hausaufgaben (Bearbeitung bis 22.05.2014)

H 8.1 *Integrale von nicht-negativen Funktionen*

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein beschränktes Intervall und $f : I \to [0, \infty)$ eine nicht-negative, stetige Funktion.

a) Sei f nicht die Nullfunktion. Zeigen Sie, dass dann

$$\int_I f(x)\,dx > 0$$

gilt.

Hinweis: Analysis 1, **H 12.2**.

b) Sei

$$\int_I f(x)\phi(x)\,dx = 0 \qquad \text{für alle stetigen Funktionen} \quad \phi(x) \in C(I). \tag{1}$$

Zeigen Sie (durch Widerspruch), dass dann $f(x) = 0$ für alle $x \in I$ gilt.

Bemerkung: Die Gleichung (1) wird eine schwache Formulierung der Gleichung $f(x) = 0$ im Bezug auf die Menge der sogenannten Testfunktionen $\phi(x) \in C(I)$ genannt. Für stetige Funktionen $f(x)$ ist also die schwache Formulierung äquivalent zur starken Formulierung $f(x) = 0$ für alle $x \in I$, im Allgemeinen jedoch schwächer, da z.B. $f(x) \neq 0$ auf einer Nullmenge erlaubt ist.

H 8.2 *Integrale II*

a) Berechnen Sie

$$\int \frac{x^4}{(x^2+4)(x-2)}.$$

Hinweis: Partialbruchzerlegung und $\int \frac{dy}{1+y^2} = \arctan(y)$.

b) Sei $g(t) = 2\arctan(t)$ und $g'(t) = \frac{2}{1+t^2}$. Verwenden Sie **H 6.4**, um zu zeigen, dass $\sin(g(t)) = \frac{2t}{1+t^2}$ gilt. Zeigen Sie, dass

$$\int_{g(a)}^{g(b)} \frac{1}{\sin(x)}\,dx = \ln(b) - \ln(a)$$

und damit

$$\int_c^d \frac{1}{\sin(x)}\,dx = \ln\left(\tan\frac{x}{2}\right)\Big|_{x=c}^{x=d}, \qquad 0 < c < d < \pi,$$

gilt.

H 8.3 *Konvergenz von Integralen II*

a) Bestimmen Sie die Stammfunktion S von $\ln(x)$ für $x \in \mathbb{R}_+$. Gilt $\int_0^1 \ln(x)\,dx = S(1) - S(0)$?

b) Für welche $a \in \mathbb{R}$ konvergiert $\int_1^\infty x^a\,dx$ bzw. $\int_0^\infty x^a\,dx$?

H 8.4 *Differentialgleichung mittels Integralen*

Sei $g(t) > 0$ eine positive, stetig differenzierbare Funktion auf einem Zeitinterval $[0, T]$ mit $T > 0$. Zeigen Sie: Erfüllt die Funktion g die Gleichung

$$g'(t) = \lambda g(t), \tag{2}$$

für alle $t \in [0, T]$, dann gilt

$$g(T) = g(0)e^{\lambda T}.$$

Anleitung: Dividieren Sie (2) durch $g(t)$ und integrieren Sie beide Seiten der Gleichung über $[0, T]$.

Bemerkung: Die Gleichung (2) beschreibt z.B. die kontinuierliche Verzinsung des Kapitals $g(t)$ mit einer Zinsrate λ über einen Zeitraum $[0, T]$.

H 8.5 *Integrale und gleichmäßige Konvergenz*

Sei (f_n), $f_n \colon [a, b] \to \mathbb{R}$, eine Folge von Regelfunktionen, die gleichmäßig gegen eine Regelfunktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ konvergiert.

a) Zeigen Sie, dass bei gleichmäßiger Konvergenz die Limesbildung mit der Integration vertauscht werden darf, d.h., es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Hinweis: Abschätzung mit Supremumsnorm.

b) Gegenbeispiel bei punktweiser Konvergenz: Sei $[a, b] = [0, 1]$. Zeigen Sie, dass die Folge

$$f_n(x) := \begin{cases} n^2 x & x \in [0, \frac{1}{n}], \\ 2n - n^2 x & x \in [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}], \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

punktweise gegen Null konvergiert ($f_n(x) \to 0$ für alle $x \in [0, 1]$), jedoch $\int_0^1 f_n(x)\,dx = 1$ für alle n gilt.

H 8.6 *Integrale III* **(Zusatzaufgabe, außer Wertung)**

Sei $p(x)$ ein Polynom und $0 \neq a \in \mathbb{R}$.

a) Zeigen Sie durch partielle Integration, dass

$$\int p(x)e^{ax}\,dx = q(x)e^{ax} + c, \tag{3}$$

wobei $q(x)$ ein Polynom vom Grad $\operatorname{grad}(q) = \operatorname{grad}(p)$ ist.

b) Verwenden Sie den Lösungsansatz (3) um das Integral

$$\int (x^3 - 3x + 2)e^{2x}\,dx$$

mit Koeffizientenvergleich zu bestimmen.