ANALYSIS II

Hausaufgaben (Bearbeitung bis 08.05.2014)

H 6.1 *Treppenfunktionen I*

Für $a \in (0,1)$ und $n \in \mathbb{N}$ betrachte man die folgenden Partition des Intervalls

$$[a,1] = \dot{\bigcup}_{i=1}^{n} I_{i,n}$$

mit

$$I_{i,n} := \left[a^{1-\frac{i-1}{n}}, a^{1-\frac{i}{n}}\right)$$

für alle $1 \leqslant i \leqslant n-1$ und

$$I_{n,n} := \left[a^{\frac{1}{n}}, 1\right].$$

Geben Sie eine Folge (f_n) von Treppenfunktionen an mit den folgenden beiden Eigenschaften: Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $1 \leqslant i \leqslant n$ ist die Funktion f_n auf dem Teilintervall $I_{i,n}$ konstant und die Folge (f_n) konvergiert gleichmäßig gegen die Funktion $f : [a,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) := \frac{1}{x}$. Berechnen Sie dann mit Hilfe dieser Folge das Integral

$$\int_a^1 f(x)\,dx$$

und untersuchen Sie das Verhalten dieser Integrale für $a \to 0$.

H 6.2 *Lipschitz-Stetigkeit des Integrals*

Sei f eine Regelfunktion auf einem kompakten Intervall $[a,b]$. Zeigen Sie, dass die Funktion $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,dt$$

Lipschitz-stetig ist, d.h. es existiert ein $M > 0$ so dass

$$|F(x) - F(y)| \leqslant M\,|x-y|$$

für alle $x, y \in [a,b]$.

H 6.3 *Integrale I*

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

a)
$$\int_{\frac{1}{e}}^{1} \frac{\ln x}{x^2}\,dx\,,$$

b)
$$\int_0^{\pi} e^x \sin 2x\,dx\,,$$

c)
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{1-\sin x}\,dx\,.$$

H 6.4 *Substitution in Integralen I*

a) Betrachten Sie die Substitution $t := \tan(x/2)$ und zeigen Sie, dass damit die folgenden Darstellungen gelten

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \text{ und } \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}\,.$$

b) Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{(1+\sin x+\cos x)^3}\,dx\,.$$

H 6.5 *Ableitung eines Integrals I*

Gegeben seien zwei Intervalle $[a,b],[c,d]\subset\mathbb{R}$, eine stetige Funktion $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ und differenzierbare Funktionen $g,h:[c,d]\to[a,b]$. Zeigen Sie, dass die Funktion $F:[c,d]\to\mathbb{R}$ definiert durch

$$F(x) := \int_{g(x)}^{h(x)} f(t)\,dt$$

differenzierbar ist und bestimmen Sie ihre Ableitung F'.

H 6.6 *Rekursive Bestimmung von Integralen* **(Zusatzaufgabe, außer Wertung)**

Es sei

$$I_m^n(x) = \int x^m \ln^n x\,dx$$

für alle $m,n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$. Zeigen Sie, dass folgende Rekursion für $m\geqslant 0$ und $n\geqslant 1$ erfüllt ist

$$I_m^n(x) = \frac{x^{m+1}}{m+1}\ln^n x - \frac{n}{m+1} I_m^{n-1}(x)$$

und berechnen Sie damit eine Stammfunktion

$$\int x^2 \ln^3 x\,dx\,.$$