ANALYSIS II

Hausaufgaben (Bearbeitung bis 10.04.2014)

H 5.1 *Funktionenfolgen III*

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$$

Zeigen Sie: $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist gleichmäßig konvergent, die Funktionen f_n sind differenzierbar, aber die Grenzfunktion ist nicht differenzierbar in $x = 0$.

H 5.2 *Funktionenfolgen IV*

Sei $I = (a, b)$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ ein Interval und $f : I \to \mathbb{R}$ konvex und differenzierbar auf I. Für beliebige Punkte $x_1, \dots, x_n \in I$, $n \in \mathbb{N}$, definiere

$$f_n : I \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \max_{i=1,\dots,n} \{f(x_i) + f'(x_i)(x - x_i)\}.$$

a) Zeichnen Sie f und f_n für eine beliebige (nicht triviale) Wahl von $x_1, \dots, x_n$ und f.

b) Zeigen Sie, dass $f(x) \geqslant f_n(x)$ für alle $x \in I$ und jede beliebige Wahl von $x_1, \dots, x_n$.

c) Geben sie eine Folge $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ in I an, so dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise gegen f konvergiert.

d) Angenommen, f sei zu einer auf $[a, b]$ stetig differenzierbaren Funktion fortsetzbar. Gibt es eine Folge $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$, so dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen f konvergiert?

H 5.3 *Funktionenfolgen V*

Für $n \in \mathbb{N}$ sind die Funktionen $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leqslant x < \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \\ \frac{2xn-n+2}{4} & \text{für } \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \leqslant x < \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \\ 1 & \text{für } \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$

a) Zeigen Sie, dass die Funktionen f_n stetig sind und skizzieren Sie die Funktionsgraphen.

b) Bestimmen Sie für alle $x \in [0, 1]$ den Grenzwert $\lim_{x\to\infty} f_n(x)$ und geben Sie die Grenzfunktion f an, gegen die die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise konvergiert.

c) Stellen Sie fest, ob die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichgmäßig gegen f konvergiert.

d) Ist die Folge der f_n eingeschränkt auf $(0, \frac{1}{2})$ gleichmäßig konvergent?

H 5.4 *Funktionenreihen I*

Welche der folgenden Funktionenreihen konvergieren (punktweise, gleichmäßig, normal)

a) $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ auf $(-1, 1)$?

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^c}$ auf $\mathbb{R}$, mit $c > 1$?

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(x/n)}{n}$ auf $[-\pi, \pi]$?

H 5.5 *Regelfunktionen I*

Sei $f : [0, 1] \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ eine Funktion mit der Eigenschaft, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ nur endlich viele $x \in [0, 1]$ existieren mit

$$f(x) \geqslant \frac{1}{n}.$$

Zeigen Sie, dass f eine Regelfunktion auf $[0, 1]$ ist.

H 5.6 *Newton-Verfahren* **(Zusatzaufgabe, außer Wertung)**

Es seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine C^2-Funktion, $f(a) < 0 < f(b)$, und für alle $x \in [a, b]$ sei $f'(x) > 0$ und $f''(x) \geqslant 0$. Die Folge $(x_n)_{n \geqslant 0}$ sei rekursiv definiert durch

$$x_0 = b, \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \text{ falls } x_n \in [a, b], \quad \text{und } x_{n+1} = x_n \text{ sonst.}$$

Zeigen Sie

a) Es gibt genau ein $\xi \in (a, b)$ mit $f(\xi) = 0$, die Folge $(x_n)_{n \geqslant 0}$ ist monoton fallend und $(x_n)_{n \geqslant 0} \to \xi$.

b) Setzt man

$$\mu = \max\left\{\frac{1}{|f'(x)|} | x \in [a, b]\right\}, \quad M = \frac{\mu}{2}\{|f''(x)| : x \in [a, b]\} \quad \text{(Existenz?)}$$

so gelten die Abschätzungen

$$|x_n - \xi| \leqslant \mu |f(x_n)| \quad \text{und} \quad |x_{n+1} - \xi| \leqslant M |x_n - \xi|^2. \quad \text{(Quadratische Konvergenz)}$$

Tipp: Benutzen sie die Restglied Darstellung von Lagrange, um zu folgern, dass für jedes $x \in (\xi, b)$ Punkte $y, z \in (\xi, x)$ existieren mit

$$0 = f(\xi) = f(x) + f'(y)(\xi - x) = f(x) + f'(x)(\xi - x) + \frac{f''(z)}{2}(\xi - x)^2.$$

c) Interpretieren Sie das Verfahren geometrisch und berechnen Sie damit eine Nullstelle der Polynomfunktion $x^3 + x - 1$ im Intervall $[0, 1]$ mit einem Fehler $\epsilon \leqslant 10^{-4}$.