FELLNER, HOLLER, KOCH, KRAFT, LATOS, PEICHL, PROPST, SPRÜSSEL UE MAT.152_1/2
BLATT 3 SS 2014

ANALYSIS II

Hausaufgaben (Bearbeitung bis 27.03.2014)

H 3.1 *Alternierende Nullstellen*

Die reellen Funktionen f, g seien auf dem Intervall (a, b) differenzierbar. Außerdem gelte

$$f'(x)g(x) \neq f(x)g'(x)$$

für alle $x \in (a, b)$. Zeigen Sie: Zwischen zwei Nullstellen von f in (a, b) liegt stets eine Nullstelle von g.

H 3.2 *Grenzwerte von Funktionen I*

Bestimmen Sie die Grenzwerte der reellen Funktionen

a) $\frac{\tan(x)-\sin(x)}{x-\sin(x)}$ für $x \to 0$,

b) $\frac{x^n}{e^x-1}$ mit $n \in \mathbb{N}$ für $x \to 0$ und $x \to \infty$,

c) $\cosh\left(\frac{\cosh(x)-1}{x\sinh(x)}\right)$ für $x \to 0$.

H 3.3 *Grenzwerte von Funktionen II*

Bestimmen Sie die Grenzwerte der reellen Funktionen

a) $x\ln(x)$ für $x \to 0$,

b) $(1-x)^{\ln(x)}$ für $x \to 0$,

c) $\frac{x}{1-x} - \frac{3}{1-x^3}$ für $x \to 1$ und $x \to \infty$,

d) $\frac{1}{x} + \ln(x)$ für $x \to 0$,

H 3.4 *Höhere Ableitungen I*

Die Funktionen f, g seien auf $\mathbb{C}$ n-mal differenzierbar und es sei $\lambda \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass auch die Funktionen λf, $f+g$, $f \cdot g$, $f \circ g$ und $\frac{f}{g}$ (letzteres unter der Annahme, dass $g(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$) n-mal differenzierbar sind. Geben Sie für $f \cdot g$ eine explizite Formel für die n-te Ableitung an und beweisen Sie diese.

H 3.5 *Taylorreihen I*

Bestimmen Sie die Taylorreihe der Funktion $f(x) = \frac{1}{x^2}$ in einem allgemeinen Punkt $a \neq 0$ und geben Sie den Konvergenzradius an. Betrachten Sie anschließend das Restglied $R_n f(a/2; a)$. Welche obere und untere Schranke für den Betrag des Restgliedes kann man aus der Darstellung von Lagrange (Satz 9c) gewinnen?

H 3.6 *Taylorreihen II* **(Zusatzaufgabe, außer Wertung)**

Es seien f, g Funktionen, welche in Umgebungen von a beziehungsweise $f(a)$ durch Taylorreihen $Tf(x; a)$ beziehungsweise $Tg(x; f(a))$ darstellbar sind. Weiter habe $Tf(x; a)$ den Konvergenzradius ρ und $Tg(x; f(a))$ den Konvergenzradius ∞.

a) Zeigen Sie, dass $g \circ f$ in einer Umgebung von a durch ihre Taylorreihe dargestellt wird und dass diese Konvergenzradius mindestens ρ besitzt.

b) Geben Sie ein Beispiel für f, g an, für welches der Konvergenzradius der Taylorreihe von $g \circ f$ größer als ρ ist.