ANALYSIS II

Hausaufgaben (Bearbeitung bis 20.03.2014)

H 2.1 *Differenzierbarkeit VI*

Beweisen Sie, dass $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ für $x \neq 0$ und mit $f(0) = 1$ differenzierbar auf $\mathbb{R}$ ist. Ist $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig auf $\mathbb{R}$?

Hinweis: Verwenden Sie die Potenzreihendarstellungen für sin, cos.

H 2.2 *Differenzierbarkeit VII*

Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ und $a < x_0 < b$. Wir nehmen an, $\exists \rho > 0 : \forall x \in (a, b)\ |f(x) - f(x_0)| \leqslant M|x - x_0|^\rho$.

a) Zeigen Sie, dass f in x_0 stetig ist.

b) Zeigen Sie, dass f differenzierbar in x_0 ist, falls $\rho > 1$, und berechnen Sie $f'(x_0)$.

c) Geben Sie ein Beispiel einer Funktion mit $\rho = 1$ an, welche in x_0 nicht differenzierbar ist.

H 2.3 *Ableitungen und Grenzwerte I*

a) Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar in a mit $f(a) = g(a) = 0$ und $g'(a) \neq 0$. Zeigen Sie, dass $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$.

b) Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathbb{R}$. Wir nehmen an, dass $f(x_0) = 0$, f differenzierbar in x_0 und g stetig in x_0 ist. Zeigen Sie, dass $f(x)g(x)$ differenzierbar in x_0 ist.

H 2.4 *Mittelwertsatz I*

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig in $[a, b]$ und differenzierbar in (a, b) mit $f(a) = f(b)$. Zeigen Sie, dass $a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b$ existieren mit $f'(x_1) + f'(x_2) = 0$.

Hinweis: Betrachten Sie zweimal den Mittelwertsatz.

H 2.5 *Produktlogarithmus*

Sei $f(x) = xe^x$. Zeigen Sie:

a) f ist bijektiv als Abbildung $[0, \infty) \to [0, \infty)$.

b) Folgern Sie, dass eine stetige Umkehrfunktion W auf $[0, \infty)$ existiert. W heißt auch Produktlogarithmus oder Lambert-W-Funktion.

c) W ist stetig differenzierbar auf $[0, \infty)$. Bestimmen Sie insbesondere $W'(0)$ und drücken Sie $W'(x)$ für $x > 0$ durch $W(x)$ aus.

H 2.6 *Ableitungen und Monotonie I* **(Zusatzaufgabe, außer Wertung)**

Sei f stetig auf $[0, a]$ und differenzierbar auf $(0, a)$ mit $f(0) = 0$ und $f'(x) > 0$ für alle $x \in (0, a)$. Zeigen Sie: Wenn f' auf $(0, a)$ monoton steigend ist, dann ist auch $\frac{f(x)}{x}$ auf $(0, a)$ monoton steigend.