ANALYSIS II

Hausaufgaben (Bearbeitung bis 13.03.2014)

H 1.1 *Differenzierbarkeit I*

Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ differenzierbar und $\lambda \in \mathbb{C}$. Beweisen Sie nur mit Anwendung der Definition, dass die folgenden Funktionen auf ganz $\mathbb{C}$ differenzierbar sind, und bestimmen Sie deren Ableitungen. Sie dürfen bei dieser Aufgabe insbesondere *nicht* Satz 1 aus der Vorlesung verwenden!

a) λf

b) $x \mapsto x^3$

c) $x \mapsto e^x$

H 1.2 *Differenzierbarkeit II*

Beweisen Sie, dass die folgenden Funktionen auf dem jeweils angegebenen Definitionsbereich D differenzierbar sind und bestimmen Sie die Ableitungen. Sie dürfen bei dieser Aufgabe alle Ergebnisse aus der Vorlesung benützen.

a) $D = (0, \infty), \quad x \mapsto \left(x^3 - 1\right) \ln x$

b) $D = \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{\sin x}{1+x^2}$

c) $D = \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sqrt{2(1 + \sin x) - \cos^2 x}$

d) $D = (0, \infty), \quad x \mapsto x^x$

H 1.3 *Differenzierbarkeit III*

Betrachten Sie

$$f_k(x) = \begin{cases} x^k \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

für $k = 0, \ldots, 3$ auf dem Definitionsbereich $D = \mathbb{R}$. Für welche Werte von k ist diese Funktion stetig, differenzierbar oder stetig differenzierbar?

H 1.4 *Differenzierbarkeit IV*

Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(a + ib) = u(a) + iv(b)$ für $a, b \in \mathbb{R}$ und mit zwei Funktionen $u, v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie: Ist f differenzierbar an einer Stelle $z = a + ib \in \mathbb{C}$, dann existieren $u'(a)$ und $v'(b)$ und es gilt $u'(a) = v'(b)$. Was folgt für die Ableitung $f'(z)$?

Hinweis: Betrachten Sie den Limes des Differenzenquotienten parallel zur reellen und imaginären Achse getrennt!

H 1.5 *Differenzierbarkeit V*

Zeigen Sie: $f : D \to \mathbb{C}$ ist an $x \in D$ genau dann differenzierbar, wenn es $a \in \mathbb{C}$ und $r : D \to \mathbb{C}$ gibt, so dass

$$f(x + h) = f(x) + ah + r(h), \quad \lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{h} = 0$$

gelten. Ist dies der Fall, so ist $a = f'(x)$. Können Sie das Ergebnis auch geometrisch interpretieren?