LAK-ComputerMathematik WS 24
3. Computerpraktikum zum Abgabetermin 11.11.2024, 23:55

12. Zuerst ein wenig Mathematik:

    Die **Drehung** eines Punktes/Ortsvektors $\vec{x} = \binom{x_1}{x_2}$ mit dem Winkel φ um den 2D–Koordinatenursprung (0,0) wird durch die Matrix–Vektor-Multiplikation

    $$\vec{x}_{new} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}_{2\times 2} * \vec{x} \tag{1}$$

    beschrieben.

    Das **Verschieben** eines Punktes $\vec{x}$ um einen Vektor $\vec{v} = \binom{v_1}{v_2}$ wird durch die Vektoraddition

    $$\vec{x}_{new} = \vec{x} + \vec{v} \tag{2}$$

    ausgedrückt.

    ——————————— nun zur Aufgabe ———————————

    Gegeben sei das aus den Punkten $(2.5, 0.5)$, $(3, -2)$, $(1.5, 0.5)$ und $(-1, 3)$ bestehende Viereck.

    (a) Speichern Sie die Punkte als geschlossenen Polygonzug in einer 2×5 Koordinatenmatrix.
    Hinweis: Sie können die Koordinaten so als eine Matrix x speichern, daß die Matrizen in Gleichung (1) kompatibel sind und sich alle Koordinaten mit einer Matrixoperation transformieren lassen. Siehe auch valide MATLAB-Befehlsfolge[1].

    (b) Zeichnen Sie das gegebene Viereck, also `plot(x,y)` mit `x` und `y` als ensprechende Zeilen der Koordinatenmatrix.

    (c) Stellen Sie (in derselben Graphik) das Viereck dar welches zuerst mit 240 Grad mathematisch positiv um den Koordinatenursprung gedreht und dann mit dem Vektor $\binom{-5}{-3}$ verschoben wurde.

    (d) Stellen Sie, ausgehend vom gegebenen Viereck unter (a), das mit dem Vektor $\binom{-5}{3}$ verschobene und dann mit 240 Grad um den Koordinatenursprung gedrehte Viereck in derselben Graphik dar.

    Hinweis: Die MatLab-Funktion `plot(x,y)` zeichnet stets den Polygonzug

    $$(x_1, y_1) \rightarrow (x_2, y_2) \rightarrow \cdots \rightarrow (x_n, y_n) \ .$$

    Um einen geschlossenen Polygonzug zu erhalten muß daher der letzte Punkt wieder der erste sein (alternativ kann auch `fill` verwendet werden).

13. Berechenen Sie die Summe der 3.Potenzen der ersten n natürlichen Zahlen $s = \sum_{k=1}^{n} k^3$ für flexibles n (z.B.: n =11, 33, 201) mittels

    (a) eines FOR-Loops

    (b) eines WHILE-Loops

    (c) ohne Loops mit `sum` oder `cumsum`

    (d) vergleichen Sie obige Ergebnisse, u.a., indem Sie die entsprechende Summenformel im Internet finden (oder beweisen).

    (e) Berechnen Sie die Summe der 3.Potenzen der ersten n geraden natürlichen Zahlen.
    Wie lautet diesmal die Summenformel?

[1] https://de.mathworks.com/help/matlab/ref/plus.html#expand_panel_body_bu90zu2

14. Zwei Primzahlen p und q werden als Primzahlzwillinge bezeichnet falls $q = p + 2$ gilt. Bestimmen Sie alle Primzahlzwillinge zwischen 1389 und 2028, geben Sie die Anzahl der gefundenen Paare aus.
    Hinweise:
    - Schauen Sie sich die Matlabfunktionen `primes` und `isprime` an.
    - Sie werden einen/mehrere FOR/WHILE-Loops zusammen mit der Alternatice (IF) benötigen.
    - Man kann die Primzahlzwillinge auch mit reinen Vektoroperationen bestimmen (fakultativ).

15. Entwerfen und schreiben Sie **zwei** Funktionen, welche die Reihenentwicklung für $\ln x$, $x > 0$

$$\begin{aligned} \ln x \approx t(x,n) \quad &:= \quad 2\sum_{k=0}^{n} \frac{(x-1)^{2k+1}}{(2k+1)(x+1)^{2k+1}} \qquad (3) \\ &= \quad 2\left[\frac{x-1}{x+1} + \frac{(x-1)^3}{3(x+1)^3} + \frac{(x-1)^5}{5(x+1)^5} + \cdots + \frac{(x-1)^{2k+1}}{(2k+1)(x+1)^{2k+1}} + \cdots + \frac{(x-1)^{2n+1}}{(2n+1)(x+1)^{2n+1}}\right] \end{aligned}$$

    in einem gegebenen Punkt x berechnen sollen.

    (a) Funktion `bsp_15_fkt_a(x,n)` zur Berechnung des Wertes $t(x,n)$ für Input-Parameter x, n mittels eines FOR-Loops.
    Output: approximierter Funktionwert

    (b) Funktion `bsp_15_fkt_b(x,delta)` zur Berechnung des Wertes $T(x,\delta)$ für Input-Parameter x, δ mittels eines WHILE-Loops. Hierbei sollen Sie die Summation in (3) solange fortführen wie der Absolutbetrag des neuen Summanden größer als δ ist.
    Output: approximierter Funktionwert und erreichter Berechnungsindex n.
    Die Konstrukte `break`, `continue`, `goto`, `return` sind nicht erlaubt.
    Wählen Sie selbständig Testdaten aus ($\delta <= 10^{-5}$) und kontrollieren Sie die Korrektheit der Berechnungen.

16. Die Reihenentwicklungen in Aufg. 15 sollen visualisiert werden.

    (a) Grafik 1: **Visualisieren** Sie für x im Intervall $[0.01, 20]$ die Funktion $\ln(x)$ und deren Approximationen $t(x,n)$ für $n = 1, 2, 3, 6, 12$ (Verwendung von `bsp_15_fkt_a` mit Vektoren?).

    (b) Grafik 2: Berechnen Sie für fixes $x = 14.7$ den Fehler $err(n) = |\ln(x) - t(x,n)|$ der Reihenentwicklung $t(x,n)$ zur exakten Funktion $\ln(x)$.
    Visualisieren Sie diesen Fehler $err(n)$ mit n als Abszisse und dem Fehler als Ordinate. Warum ist die Verwendung des speziellen Matlab-Befehls `semilogy` zum Plotten hier von Vorteil?

    (c) Grafik 3: Berechnen Sie für fixes δ = 1e-4 mittels Funktion $T(x,\delta)$ (`bsp_15_fkt_b`) den Abbruchindex n für $x \in [0.01, 20]$.
    Visualisieren Sie diesen Abbruchindex $n(x)$ als Funktion von x.

Abgabe der Lösungen:

Die Abgabe der Lösungen (`*.m`-Files und Grafiken) muß über Moodle[2]. erfolgen.

Die Filenamen **müssen** dem Schema `bsp_nummer`, gefolgt von der Filextension, entsprechen. Andere Filebezeichner zählen nicht als abgegebene Files.

Abzugebende Files (auch als ein zip-File möglich):

```
bsp_12.m,   bsp_12.jpg
bsp_13.m
bsp_14.m
bsp_15.m,   bsp_15_fkt_a.m,   bsp_15_fkt_b.m
bsp_16.m,   bsp_16_a.jpg,     bsp_16_b.jpg,    bsp_16_c.jpg
```


[2] `http://moodle.uni-graz.at`