Programming C++

Project **Tridiagonallöser**

Status: 25. April 2024, 15:27

Supervisor: Prof.Dr. G. Haase, `gundolf.haase@uni-graz.at`

Aufgabe: Es ist das **lineare tridiagonale Gleichungssystem** $A\underline{u} = \underline{f}$ der Dimension $n+1$ mit konstanten Koeffizenten $d \neq 0$, l, r für eine gegebene rechte Seite $\underline{f}$ zu lösen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & & & & & & & & \\ \ell & d & r & & & & & & & \\ & \ell & d & r & & & & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & & & & \\ & & & \ell & d & r & & & & \\ & & & & \ell & d & r & & & \\ & & & & & \ell & d & r & & \\ & & & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & & & & \ell & d & r \\ & & & & & & & & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{2k-1} \\ u_{2k} \\ u_{2k+1} \\ \vdots \\ u_{n-1} \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0 := g_a \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{2k-1} \\ f_{2k} \\ f_{2k+1} \\ \vdots \\ f_{n-1} \\ f_n := g_b \end{pmatrix} . \qquad (1)$$

Wir nehmen an, daß n eine Zweierpotenz ist, d.h., $n := 2^p$ (auch in C++: `int n = 1 << p;`) was uns erlaubt, die **Zyklische Reduktion** [Schwarz11, §2.4.2] als Lösungsverfahren zu benutzen.

i) Implementieren Sie eine Funktion/Methode welche (1) für gegebene $d \neq 0$, l, r und $\underline{f}$ mittels zyklischer Reduktion (cyclic reduction) nach dem Vektor $\underline{u}$ löst.

ii) Testen Sie ob Ihre Funktion für $\ell = r = -1024$ und $d = 2048$ mit $n = 2^5$ korrekt ist. Lesen dazu die rechte Seite mit $n+1$ Vektoreinträgen über das File *trisolve_f.txt*[1] ein und vergleichen Sie Ihre Lösung mit der vom File *trisolve_u.txt*[2] eingelesenen. (6 Pkt.)

iii) Schreiben Sie eine Funktion welche aus gegebenen v, a, n der entsprechenden Diff.-Gl. (3) von Seite 3 die Koeffizienten des GlS (1) ℓ, d, r berechnet und für eine gegebene Funktion $f(x)$ mit den Randbedingungen g_a und g_b löst. (+2 Pkt.)

iv) Testen Sie iii) mit den Beispielen von Seite 4. Ihre diskrete Lösung aus (1) wird hierbei von der exakten Lösung etwas abweichen (Approximationsfehler), dieser Abweichung muß sich mit größerem n verkleinern. (+2 Pkt.)

[1] `https://imsc.uni-graz.at/haasegu/Lectures/Kurs-C/projects/TriDiagSolve/trisolve_f.txt`
[2] `https://imsc.uni-graz.at/haasegu/Lectures/Kurs-C/projects/TriDiagSolve/trisolve_u.txt`

Die **Zyklische Reduktion** [Schwarz11, §2.4.2]

1. eliminiert alle ungeraden Zeilen des originalen Systems der Dimension $2^p + 1$ und generiert ein neues, zusätzliches, tridiagonales Gleichungssystem der Dimension $2^{p-1} + 1$.

2. Hierbei ergeben sich im reduzierten Gleichungssystem neu zu berechnende Koeffizienten $d^{(p-1)}$, $\ell^{(p-1)}$, $r^{(p-1)}$ und eine neue rechte Seite $\underline{f}^{(p-1)}$.
   Dazu lösen wir im GlS (1) Zeile $2k - 1$ nach u_{2k-1} auf und analog mit Zeile $2k + 1$ d.h.

   $$u_{2k-1} = \left(f_{2k-1} - \ell u_{2k-2} - r u_{2k}\right)/d \quad \text{und} \quad u_{2k+1} = \left(f_{2k+1} - \ell u_{2k} - r u_{2k+2}\right)/d$$

   und setzen dies in Zeile $2k$ ein:

   $$\ell^{(p)} u_{2k-1} + d^{(p)} u_{2k} + r^{(p)} u_{2k+1} = f_{2k}^{(p)} \quad \Longrightarrow \quad \ell^{(p-1)} u_{2k-2} + d^{(p-1)} u_{2k} + r^{(p-1)} u_{2k+2} = f_{2k}^{(p-1)}$$

   Zur Berechnung der $\ell^{(p-1)}$, $d^{(p-1)}$, $r^{(p-1)}$, $f_{2k}^{(p-1)}$ siehe die Herleitungsskizze[3]

3. Hierbei kann man für den Lösungsvektor $\underline{u}^{(s)}$ und die rechte Seite $\underline{f}^{(s)}$ für jedes $s = p - 1, \ldots, 1$ zusätzliche Vektoren anlegen. Alternativ arbeitet man mit dem originalen Vektor und verdoppelt die Schrittweite mit jedem reduzierten GlS.

4. Diesen Vorgang wiederholen wir bis zum GlS der Dimension $n = 3 = 2^1 + 1$, d.h.

   $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \\ \ell^{(1)} & d^{(1)} & r^{(1)} \\ & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0 := g_a \\ f_1^{(1)} \\ f_n := g_b \end{pmatrix} \tag{2}$$

   welches sich leicht lösen läßt.

5. f_0 und f_n bleiben für alle Dimensionen gleich.

6. Aus der der Lösung des gröbsten Systems (2) mit Dimension $2^1 + 2$ ($s = 1$) können wir die Lösung des nächste feineren System der Dimension $2^2 + 1$ dadurch berechnen, daß

   (a) alle Lösungskomponenten mit geraden Index, also $u_{2k}^{(s+1)}$, vom gröberen System übernommen werden (evtl. Indexumrechnung erforderlich) und

   (b) alle Lösungskomponenten mit ungeraden Index, also $u_{2k-1}^{(s+1)}$ und $u_{2k+1}^{(s+1)}$, entsprechend der Eliminationsformeln unter 2. berechnet werden.

   Dies wird fortgeführt, bis das Ausgangssystem der Dimension $2^p + 1$ erreicht ist.

[3] `https://imsc.uni-graz.at/haasegu/Lectures/Kurs-C/projects/TriDiagSolve/show_TriDiagSolve.pdf`

Hintergrund: Wir betrachten die Differentialgleichung

$$-\frac{d^2}{dx^2}u(x) + v \cdot \frac{d}{dx}u(x) + a \cdot u(x) = f(x) \qquad x \in]0,1[\tag{3}$$

mit Dirichlet-Randbedingungen $u(0) = g_a$ und $u(1) = g_b$ und konstanten Skalaren v, a.

Eine Möglichkeit diese Diff.-Gleichung zu lösen besteht in der Approximation obiger Ableitungen durch finite Differenzen [Ganster15]. Wird das Intervall $[0,1]$ in n äqudistante Teilintervalle der Länge $h = 1/n$ unterteilt, dann ergibt sich z.B.:

$$\frac{d^2}{dx^2}u(x) \approx \frac{u(x-h) - 2u(x) + u(x+h)}{h^2} \qquad \text{und} \qquad \frac{d}{dx}u(x) \approx \frac{u(x) - u(x-h)}{h}\ .$$

Durch die äquidistanten Teilintervalle werden diskrete Punkte $x_i = 0 + i \cdot h \quad \forall i = 0, \ldots, n$ in $[0,1]$ definiert und wir ordnen diskrete unbekannte Funktionswerte $u_i := u(x_i)$ und diskrete bekannte Funktionswerte $f_i := f(x_i)$ zu. Insbesondere erhalten wir $u(x_i - h) == u_{i-1}$ und $u(x_i + h) == u_{i+1}$.
Eingesetzt in Gl.(3) ergibt dies das diskrete System

$$\tfrac{1}{h^2}\left(-u_{i-1} + 2u_i - u_{i+1}\right) + \tfrac{v}{h}\left(-u_{i-1} + u_i\right) + au_i = f_i \qquad \forall i = 1, \ldots, n-1 \tag{4}$$

mit $u_0 = g_a$ und $u_n = g_b$.
(Das für strömungsdominante Probleme nötige Upwindung o.ä. ist hier nicht berücksichtigt.)
Aus Gl. (4) ergeben sich damit die Koeffizienten des tridiagonalen GlS (1) wie folgt:

$$\begin{aligned} d &:= \tfrac{2}{h^2} + \tfrac{v}{h} + a \\ \ell &:= -\tfrac{1}{h^2} - \tfrac{v}{h} \\ r &:= -\tfrac{1}{h^2} \end{aligned}$$

Literatur

[Ganster15] Methode der finiten Differenzen, Teilskript[4] , TU Graz.

[Schwarz11] H.R. Schwarz and N. Köckler. *Numerische Mathematik.* 8. Auflage. Vieweg+ Teubner, Wiesbaden, 2011. E-book[5]

[4] https://www.math.tugraz.at/~ganster/lv_mathematik_2_bau_ss_2015/09_finite_differenzen.pdf
[5] https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-8348-8166-3

Zu testende Beispiele:

a) $v = 0$, $a = 0$; $g_a = \frac{3}{2}$, $g_b = \frac{1}{2}$

$$
\begin{aligned}
u(x) &= \cos\left(\frac{9\,\pi\,x}{2}\right) + \sin(3\,\pi\,x) + \frac{1}{2} \\
f(x) &= \frac{81\,\pi^2}{4}\,\cos\left(\frac{9\,\pi\,x}{2}\right) + 9\,\pi^2\,\sin(3\,\pi\,x)
\end{aligned}
$$

b) $v = 0$, $a = 1$; $g_a = \frac{1}{120}$, $g_b = \frac{1}{5}$

$$
\begin{aligned}
u(x) &= x^4 - \frac{77\,x^3}{60} + \frac{71\,x^2}{120} - \frac{7\,x}{60} + \frac{1}{120} \\
f(x) &= x^4 - \frac{77\,x^3}{60} - \frac{1369\,x^2}{120} + \frac{91\,x}{12} - \frac{47}{40}
\end{aligned}
$$

c) $v = Pe$, $a = 0$; $g_a = 0$, $g_b = 1$ mit der Pécletzahl Pe (Péclet-Problem)

$$
\begin{aligned}
u(x) &= \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{Pe}\,x} - 1}{\mathrm{e}^{\mathrm{Pe}} - 1} \\
f(x) &= 0
\end{aligned}
$$