ComputerMathematik
4. Computerpraktikum zum Abgabetermin 18.11.2024, 23:59

16. Entwerfen und schreiben Sie **zwei** Funktionen, welche die Reihenentwicklung für $\ln x$, $x > 0$

$$\begin{aligned} \ln x \approx t(x,n) \quad &:= \quad 2\sum_{k=0}^{n} \frac{(x-1)^{2k+1}}{(2k+1)(x+1)^{2k+1}} \\ &= \quad 2\left[\frac{x-1}{x+1} + \frac{(x-1)^3}{3(x+1)^3} + \frac{(x-1)^5}{5(x+1)^5} + \cdots + \frac{(x-1)^{2n+1}}{(2n+1)(x+1)^{2n+1}}\right] \end{aligned} \tag{1}$$

in einem gegebenen Punkt x berechnen sollen.

(a) Funktion `bsp_16_fkt_a(x,n)` zur Berechnung des Wertes $t(x,n)$ für Input-Parameter x, n mittels eines FOR-Loops.
Output: approximierter Funktionwert

(b) Funktion `bsp_16_fkt_b(x,delta)` zur Berechnung des Wertes $T(x,\delta)$ für Input-Parameter x, δ mittels eines WHILE-Loops. Hierbei sollen Sie die Summation in (1) solange fortführen wie der Absolutbetrag des neuen Summanden größer als δ ist.
Output: approximierter Funktionwert und erreichter Berechnungsindex n.

Die Konstrukte `break`, `continue`, `goto`, `return` sind nicht erlaubt.
Wählen Sie selbständig Testdaten aus ($\delta <= 10^{-5}$) und kontrollieren Sie die Korrektheit der Berechnungen.

17. Die Reihenentwicklungen in Aufg. 16 sollen visualisiert werden.

(a) Grafik 1: **Visualisieren** Sie für x im Intervall $[0.01, 20]$ die Funktion $\ln(x)$ und deren Approximationen $t(x,n)$ für $n = 1, 2, 3, 6, 12$ (Verwendung von `bsp_16_fkt_a` mit Vektoren?).

(b) Grafik 2: Berechnen Sie für fixes $x = 14.7$ den Fehler $err(n) = |\ln(x) - t(x,n)|$ der Reihenentwicklung $t(x,n)$ im Vergleich zur exakten Funktion $\ln(x)$.
Visualisieren Sie diesen Fehler $err(n)$ mit n als Abszisse und dem Fehler als Ordinate. Warum ist die Verwendung des speziellen Matlab-Befehls `semilogy` zum Plotten hier von Vorteil?

(c) Grafik 3: Berechnen Sie für fixes δ = 1e-4 mittels Funktion $T(x,\delta)$ (`bsp_16_fkt_b`) den Abbruchindex n für $x \in [0.01, 20]$.
Visualisieren Sie diesen Abbruchindex $n(x)$ als Funktion von x.

Hinweise: `linspace`, `figure`, `semilogy`, `abs`,

18. Die quadratische Gleichung

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0 \qquad a, b, c \in \mathbb{R} \tag{2}$$

hat, in Abängigkeit von den Parametern a, b, c

- zwei (reelle; doppelt reelle; konjugiert komplexe) Lösungen,
- eine einfache reelle Lösung,
- keine Lösung
- unendlich viele Lösungen, d.h., alle Zahlen aus $\mathbb{R}$ sind Lösung

(a) Überlegen Sie, wie die Lösungsmenge, z.B., in den Fällen $a \neq 0 \mid a \equiv 0$ und $b \neq 0 \mid$ $a \equiv 0$ und $b \equiv 0$ und $c \equiv 0$ aussieht.

(b) Schreiben Sie eine Funktion `[x1,x2,nlsg] = bsp_18_fkt(a,b,c)` welche alle möglichen Fälle für die reellen *Input*parameter a, b, c berücksichtigt und die Lösungen $x1, x2$ sowie die Anzahl der Lösungen $nlsg$ zurückgibt.

- $x1$, $x2$ können auch komplex sein.
- Falls keine, oder keine zweite Lösung vorhanden ist, dann den/die Lösungswert/e auf `NaN` (not a number) setzen.

- Im Falle unendlich vieler Lösungen wird *nlsg* auf `Inf` (infinity) gesetzt. Als Lösungspaar kann man etwas leicht erkennbares nehmen, wie `NaN` oder `Inf`.
- Testen Sie Ihre Funktion mit folgenden Parametern für (a, b, c):
  $(2, 4, 2)$, $(2, 4, -1)$, $(2, 4, 4)$, $(0, 4, 3)$, $(0, 0, 0)$, $(0, 0, 3)$.

(c) Nehmen Sie einen Parameter $p \in [-10, 10]$ (z.B., `p = linspace(-10,10,101)`) und visualisieren Sie (`plot`) die Lösungen $x1$ und $x2$ gemeinsam in Abhängigkeit vom Parameter p für folgende quadratische Gleichungen in 4 Graphiken (`subplot`):

- $2 \cdot x^2 + 4 \cdot x + p = 0$
- $2 \cdot x^2 + p \cdot x + 4 = 0$
- $2 \cdot x^2 - 4 \cdot x + p = 0$
- $2 \cdot x^2 + p \cdot x - 4 = 0$

Woran erkennen Sie bei diesen Plots die, hier nicht darstellbaren, komplexen Lösungen?

19. Visualisieren Sie die Funktion

$$f(x, y) = \mathrm{e}^{-\left(x^2+4y^2\right)} \sin(\pi(3x + y)) \qquad \text{für} \qquad (x, y) \in [-2, 2] \times [-2, 2] \ .$$

auf mindestens 2 verschiedenen Arten, z.B. `surf` (numerische Werte), `fsurf` (symb. Funktion).
Hinweise: `linspace`, `meshgrid`, `surf`, `fsurf`, `ezsurf`, `matlabFunction`

20. Diese Aufgabe ist zweigeteilt, wird aber in einer Graphik dargestellt.

(a) Zeichnen Sie die Kurve im Raum (via `plot3`[1]) welche die Parameterdarstellung

$$x(t) := 2t \sin(2\pi t) \quad , \quad y(t) := t \cos(2\pi t) \quad , \quad z(t) := 3 - t^2$$

für $t \in [0, 2]$ besitzt. Diese Kurve kann man sich als Weg eines Staubteilchens vorstellen.

(b) Dieses Staubteilchen sammelt auf seinem Weg kleinere Partikel ein und wächst dabei. Das Staubteilchen nehmen wir als Kugel an, dessen Mittelpunkt (zu verschiedenen Zeitpunkten t) durch obige Kurve beschrieben wird und dessen Radius wie folgt gegeben ist:

$$r(t) = 0.01 + t^2/6 \ .$$

Zeichnen Sie diese, sich vergrößernden Kugeln entlang der Kurve ein.
Zeichnen Sie nur so viele Kugeln (`sphere`), daß diese sich nicht durchdringen.

Hinweise: `plot3`, `sphere`, `ellipsoid`, `hold on`, `axis equal`

Abgabe der Lösungen:

Die Abgabe der Lösungen (`*.m`-Files und Grafiken) muß über Moodle[2]. erfolgen.

Die Filenamen **müssen** dem Schema `bsp_nummer`, gefolgt von der Filextension, entsprechen. Andere Filebezeichner zählen nicht als abgegebene Files.

Abzugebende Files (auch als ein zip-File möglich):

`bsp_16.m`,	`bsp_16_fkt_a.m`,	`bsp_16_fkt_b.m`	
`bsp_17.m`,	`bsp_17_a.jpg`,	`bsp_17_b.jpg`,	`bsp_17_c.jpg`
`bsp_18.m`,	`bsp_18_fkt.m`,	`bsp_18.jpg`	
`bsp_19.m`,	`bsp_19.jpg`		
`bsp_20.m`,	`bsp_20.jpg`		

[1] `http://www.mathworks.de/de/help/matlab/ref/plot3.html`
[2] `http://moodle.uni-graz.at`