Höhere Mathematik III, Übungen, Wintersemester 2007
6. Übungsblatt, vom 12. 11. 2007

Die Übungsbeispiele dienen zur Vorbereitung auf die folgenden Übungseinheiten, wo ähnliche Beispiele gerechnet werden.

1. Bestimmen Sie den Gradienten von f im Punkt P:
   a) $f(x,y) = 3x - 5y^2 + 10$, $P = (2,1)$
   b) $f(x,y) = 2xe^{y/x}$, $P = (2,0)$
   c) $f(x,y,z) = 3x^2y - 5yz + z^2$, $P = (1,1,-2)$.

2. Berechnen Sie die Richtungsableitung der Funktion f im Punkt P in der Richtung von P nach Q unter Verwendung des Gradienten von f. (Untersuchen Sie dabei stets ob ∇f im Punkt P stetig ist.)
   a) $f(x,y) = x^2 + y^2 + 1$, $P = (1,2)$, $Q = (3,6)$
   b) $f(x,y) = e^{-x}\cos y$, $P = (0,0)$, $Q = (2,1)$
   c) $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$, $P = (1,1)$, $Q = (2,2)$.

3. Bestimmen Sie in den Punkten P_1 und P_2 die Richtung des stärksten Anstiegs (Abstiegs) der Funktion f:
   a) $f(x,y,z) = x + y + z$, $P_1 = (37,96,-102)$, $P_2 = (0,0,0)$
   b) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$, $P_1 = (-1,-2,-3)$, $P_2 = (0,0,0)$
   a) $f(x,y,z) = xyz$, $P_1 = (1,0,-1)$, $P_2 = (0,0,0)$.

4. Bestimmen Sie die Ableitung $Df(P)$ oder $f'(P)$ der Funktion f im Punkt P:
   a) $f(x) = \begin{pmatrix} 3x \\ 2x^2 + 5x \\ 7x^3 + 9x + 11 \end{pmatrix}$, $P = (-1)$
   b) $f(x,y) = \begin{pmatrix} \sin x \cos y \\ \sin^2 x \cos^2 y \\ \sin^2 x + \cos^2 y \\ 2(\sin x \cos x + \sin y \cos y) \end{pmatrix}$, $P = (\pi/4, \pi)$
   c) $f(x,y,z) = \cos x \sin y \tan z$, $P = (\pi/2, \pi, 3\pi/4)$
   d) $f(x,y,z) = \begin{pmatrix} x + 2y + 3z \\ x^2 + 2xy + 3xz \\ x^3 + 2x^2y + 3x^2z \end{pmatrix}$, $P = (-1,1,1)$.

5. Approximieren Sie mit Hilfe der Ableitung einer geeigneten Funktion:
   a) $\sqrt{4.05^2 + 3.1^2} - \sqrt{4^2 + 3^2}$
   b) $\dfrac{1 - 3.05^2}{5.95^2} - \dfrac{1 - 3^2}{6^2}$
   c) $\sqrt{26}\sqrt[3]{28}\sqrt[4]{17}$.

6. Gegeben sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 + 2(y-1)^2$, ein Punkt $P = (-1,-1)$ und ein Vektor $\mathbf{v} = (2,1)$.
   a) Für $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(\lambda) := f(P + \lambda\mathbf{v})$, bestimmen Sie λ_0 so, dass $g(\lambda_0) \le g(\lambda)$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$.
   b) Berechnen Sie $Q := P + \lambda_0\mathbf{v}$ und $\nabla f(Q)$. Bestimmen Sie $\langle \nabla f(Q), \mathbf{v} \rangle$.