Höhere Mathematik III, Übungen, Wintersemester 2007
3. Übungsblatt, bis 22. 10. 2007

Die Übungsbeispiele dienen zur Vorbereitung auf die Übungseinheit am 22. 10. 2007. Ähnliche Beispiele werden in der Übungseinheit gerechnet.

1. Sei n eine positive ganze Zahl, I ein offenes Intervall in $\mathbb{R}$ und $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^n$ eine differenzierbare Kurve. Zeigen Sie, dass die Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$, $f(t) := \|\gamma(t)\|$, $t \in I$, an allen Stellen t, wo $f(t) \neq 0$ ist, differenzierbar ist, und dass dort
$$f'(t) = \frac{(\gamma(t), \gamma'(t))}{\|\gamma(t)\|}$$
gilt.

2. Sei I ein offenes Intervall in $\mathbb{R}$, $t \in I$ und $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^3$ eine zweimal differenzierbare Raumkurve. Falls $\gamma'(t) \neq 0$, dann ist der Normaltangentenvektor $T(t)$ (oder Einheitstangentenvektor) gegeben durch
$$T(t) := \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}.$$
Falls $T'(t) \neq 0$, dann ist der Hauptnormalvektor $N(t)$ gegeben durch
$$N(t) := \frac{T'(t)}{\|T'(t)\|}$$
und der Binormalvektor $B(t) := T(t) \times N(t)$. Zeigen Sie:
   (a) $\|B(t)\| = 1$
   (b) $\gamma'(t)$ und $\gamma''(t)$ liegen in der von $T(t)$ und $N(t)$ aufgespannten Ebene.
   (c) $\gamma'(t) \times \gamma''(t)$ ist ein skalares Vielfaches von $B(t)$. Bestimmen Sie diesen Skalar.
   (d) Kennt man $T(t)$ und $B(t)$, dann ist $N(t) = B(t) \times T(t)$.
   (e) Bestimmen Sie $N(t)$, $T(t)$ und $B(t)$ für die Kurve
$$\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \quad \gamma(t) := (t, t^2, 2t^3/3).$$

3. Sei I ein offenes Intervall in $\mathbb{R}$ und $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^3$ eine zweimal differenzierbare Raumkurve.
   (a) Zeigen Sie dass für $a, b \in \mathbb{R}^3$ gilt:
$$\|a \times b\| = \left\| b - \frac{(a,b)}{\|a\|^2}\, a \right\| \cdot \|a\|.$$
   (b) Sei $g\colon I \to \mathbb{R}^3$ eine differenzierbare Funktion. Für $t \in I$ mit $g(t) \neq 0$ sei durch $f(t) := g(t)/\|g(t)\|$ eine Funktion definiert. Zeigen Sie, dass f differenzierbar ist und berechnen Sie $f'(t)$ als
$$\frac{1}{\|g(t)\|^2}\left(g'(t)\|g(t)\| - \frac{(g(t), g'(t))}{\|g(t)\|} g(t) \right).$$
   (c) Sei $\gamma'(t) \neq 0$. Zeigen Sie, dass die Krümmung durch
$$\kappa(t) = \frac{\|\gamma'(t) \times \gamma''(t)\|}{\|\gamma'(t)\|^3}$$
   gegeben ist.

4. Berechnen Sie die Krümmung der Kurve aus dem Beispiel 2 (e). Bestimmen Sie für $t_0 = 3/2$ das Frenetsche Dreibein, den Krümmungskreis und die Berührungsebene (oder Schmiegungsebene). (Auch $t_0 = 0$ ist interessant.)

5. Für $t \geq 0$ sei durch $\gamma(t) := (e^{-t}\cos t, e^{-t}\sin t)$ eine Kurve gegeben. Für beliebiges $t \geq 0$ berechnen Sie deren Bogenlänge $\sigma(t)$ im Intervall $[0, t]$. Hat diese Kurve, wenn t beliebig groß wird, eine endliche Länge? Benutzen Sie die Formel für $s = \sigma(t)$, um den Parameter t als Funktion von s darzustellen und leiten Sie so eine Parametrisierung der Spirale nach der Bogenlänge her.