

LINEARE ALGEBRA I**Hausaufgaben** (Bearbeitung bis 10.12.2008)**H 9.1** *Ähnlichkeit und Äquivalenz*

Sind die folgenden beiden Matrizen ähnlich bzw. äquivalent?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

H 9.2 *Äquivalenz von Matrizen*

Sind die folgenden beiden Matrizen äquivalent?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Falls ja, bestimmen Sie S, T , so dass $B = SAT$ gilt.

H 9.3 *Spur ähnlicher Matrizen*

Seien $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ ähnliche Matrizen. Zeigen Sie, dass für die Spur $tr(A) := \sum_{i=1}^n a_{ii}$ gilt:

$$tr(A) = tr(B).$$

Hinweis: Zeigen Sie, dass $tr(ST) = tr(TS)$ für beliebige Matrizen $S, T \in \mathbb{K}^{n \times n}$ gilt.

H 9.4 *Ähnliche Matrizen sind Darstellung des selben linearen Operators*

Seien $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ und V ein Vektorraum der Dimension n . Zeigen Sie: A und B sind ähnlich, genau dann, wenn es Basen $U := (u_1, \dots, u_n)$ und $W := (w_1, \dots, w_n)$ von V und einen linearen Operator $T \in \mathcal{L}(V)$ gibt, so dass A und B jeweils darstellende Matrix von T bezüglich U bzw. W sind.

H 9.5 *Ähnlichkeit ist eine Äquivalenzrelation*

Zeigen Sie, dass die Ähnlichkeit von Matrizen eine Äquivalenzrelation \sim ("ist ähnlich zu") definiert, d.h. weisen Sie folgende Eigenschaften für alle $A, B, C \in \mathbb{K}^{n \times n}$ nach:

- $A \sim A$,
- $A \sim B$ impliziert $B \sim A$,
- $A \sim B$ und $B \sim C$ impliziert $A \sim C$.

Bestimmen Sie alle $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$, für die gilt: $B \sim A \Rightarrow B = A$ für alle $B \in \mathbb{K}^{n \times n}$.

Freiwillige Trainingsbeispiele (werden von Tutoren korrigiert)**T 9.1** *Nochmal Ähnlichkeit und Äquivalenz*

Sind die folgenden beiden Matrizen ähnlich bzw. äquivalent?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -4 & 10 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}.$$

T 9.2 *Nochmal Äquivalenz von Matrizen*

Sind die folgenden beiden Matrizen äquivalent?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Falls ja, bestimmen Sie S, T , so dass $B = SAT$ gilt.