6. Übung zur Diskreten Mathematik

Aufgaben für den 10.11.2015

Wir bespreche zuerst Aufgabe 17.

22. Der Hörsaal H besitzt abzählbar unendlich viele Sitzplätze. Mit Ausnahme von 3 Plätzen sind alle besetzt. Zwei Minuten nach Beginn der Vorlesung kommen noch 4 Studierende in die Vorlesung. Einer von ihnen will sich gerade auf den Fußboden setzen, als der Vortragende, Professor Hilbert, gut mit abzählbar unendlich großen Hörsälen vertraut, für ihn einen weiteren Sitzplatz freimacht, sodass nun alle Studierenden einen Sitzplatz haben. Er berücksichtigte dabei auch, dass die Personen in der ersten Reihe (Sitzplatz 1 bis 999) aufgrund einer Sehschwäche nicht versetzt werden sollen. Wie ging er wohl vor?

    Nachdem wieder Ruhe eingekehrt ist, öffnet sich nochmals die Tür und alle Studierenden aus dem ebenfalls bis auf den letzten Platz gefüllten Hörsaal I, der ebenfalls abzählbar unendlich viele Sitzplätze aufweist, treten ein. Leider hat Professor X wieder seine Vorlesung überzogen. Gelingt es dem Vortragenden, sie alle auf Sitzplätzen unterzubringen, so dass höchstens eine Person auf einem Platz sitzt? Helfen Sie ihm dabei!

    Hinweis: Eine Menge M heißt abzählbar unendlich, falls es eine Bijektion zwischen $\mathbb{N}$ und M gibt.

23. Bestimmen Sie die Anzahlen der möglichen Standard- und Wunschkennzeichen für
    (a) Graz (Unterscheidungszeichen G) und
    (b) Graz Umgebung (Unterscheidungszeichen GU).

    Es gelten folgende Regelungen:

    Auf ein „Unterscheidungszeichen“, das den Bezirk oder die Stadt angibt, folgt ein Wappen und das „Vormerkzeichen“.

    Für die Standardkennzeichen gelten folgende Regelungen: Die Vormerkzeichen müssen vier bis fünf Zeichen, in den Landeshauptstädten und in Wien fünf bis sechs Zeichen enthalten. Sie müssen mit einer Ziffer beginnen und mit einem Buchstaben enden sowie mindestens eine Ziffer und ein bis drei Buchstaben enthalten. Es müssen alle Ziffern und alle Buchstaben je in geschlossen Blöcken auftreten; ein „Mischen“ von Ziffern und Buchstaben ist nicht erlaubt. Der Buchstabe „O“ an der ersten Stelle im Buchstabenblock ist nicht erlaubt.

    Für die Wunschkennzeichen sehen die Regeln wie folgt aus: Die Vormerkzeichen müssen mindestens drei und können bis zu fünf Zeichen, bei den in den Landeshauptstädten und in Wien zugewiesenen Kennzeichen mindestens drei und bis zu sechs Zeichen enthalten. Sie müssen mindestens einen Buchstaben und mindestens eine Ziffer enthalten, mit einem Buchstaben beginnen und mit einer Ziffer enden, wobei alle Buchstaben und alle Ziffern nur je in geschlossenen Blöcken vorkommen dürfen. Das Verwenden von Buchstaben abwechselnd mit Ziffern ist unzulässig. Die gewünschte Kombination kann von der Behörde auch abgelehnt werden!

Für beide Arten von Kennzeichen gilt: Es dürfen nur Großbuchstaben verwendet werden; die Verwendung des Buchstaben Q und der Umlaute Ä, Ö und Ü ist nicht gestattet. Die Ziffer „0“ an der ersten Stelle im Ziffernblock ist unzulässig; (Verwenden Sie das Summenprinzip und das Produktprinzip.)

24. Sei $n \in \mathbb{N}_+$ und

$$Q_n = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{(i+1)!} \;\middle|\; a_i \in [\![0, i]\!],\ i \in [\![1, n]\!] \right\}.$$

Zeigen Sie, dass

$$Q_n = \left\{ \frac{k}{(n+1)!} \;\middle|\; k \in [\![0, (n+1)! - 1]\!] \right\},$$

dass $Q_n \subset Q_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}_+$, und dass jedes $x \in Q_n$, $n \in \mathbb{N}_+$, eine eindeutige Darstellung in der Form $x = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{(i+1)!}$ mit $a_i \in [\![0, i]\!]$, $1 \leq i \leq n$ besitzt. (Nach dem Bijektionsprinzip finden Sie eine bijektive Beziehung zwischen Q_{n+1} und einem kartesichen Produkt $Q_n \times M$ mit einer geeigneten Menge M.)