9. Proseminar zur Einführung in die komplexe Analysis

10.1.2011

1. Sei G ein Gebiet, in dem Logarithmusfunktionen log existieren. Für $\sigma \in \mathbb{C}$ sei $p_\sigma(z) := \exp(\sigma \log z)$, $z \in G$, eine Potenzfunktion, die von der Wahl der Logarithmusfunktion log abhängen kann. Für welche $\sigma \in \mathbb{C}$ gibt es genau eine Potenzfunktion auf G, für welche σ endlich viele (und dann genau wieviele?), für welche σ unendlich viele? Beweisen Sie Ihre Behauptung!

2. Sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge ohne Häufungspunkt in $\mathbb{C}$, $z_n \neq z_m$ für $n \neq m$, und $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ebenfalls eine Folge in $\mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass es ganze Funktionen gibt, die $f(z_n) = w_n$, $n \in \mathbb{N}$, erfüllen.

3. Bestimmen Sie
$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{x + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}}\, dx$$
für $a \in \mathbb{R}$, $0 < a < 1$, $-\pi < \varphi < \pi$, und
$$\int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{x^n + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}}\, dx$$
für $m, n \in \mathbb{N}$, $0 < m < n$, $-\pi < \varphi < \pi$.