

8. Proseminar zur Einführung in die komplexe Analysis

Bearbeitung bis 10.1.2011

1. Berechnen Sie

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos(3t)}{5 - 4\cos(t)} dt.$$

2. Zeigen Sie:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^2} dx = \frac{\pi}{2a}, \quad a > 0,$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)} = \frac{\pi}{ab(a+b)}, \quad a, b > 0, a \neq b.$$

3. Entwickeln Sie $\frac{e^z - 1}{z}$ um $z = 0$ in eine Potenzreihe. Zeigen Sie, dass $f(z) = \frac{z}{e^z - 1}$ um $z = 0$ in eine Potenzreihe entwickelt werden kann. Wie gross ist der Konvergenzradius dieser Reihe? Beweisen Sie: Sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n$, dann gilt $a_{2n+1} = 0$ für alle $n \geq 1$. $a_0 = 1$, $a_1 = -1/2$, und für $N \geq 2$ gilt

$$\sum_{n=0}^{N-1} \binom{N}{n} a_n = 0.$$

4. Finden Sie eine ganze Funktion f , für die $f(n) = 1/n$ für alle $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ gilt.
5. Finden Sie eine ganze Funktion, die einfache Nullstellen genau in den Punkten $z_n = n^2$, $n \in \mathbb{N}$ hat. Geben Sie eine Abschätzung für $\max_{|z| \leq R} |f(z)|$ an.