7. Proseminar zur Einführung in die komplexe Analysis

29.11.2010

1. Seien P und Q holomorphe Funktionen in Umgebung von z_0 mit $P(z_0) \neq 0 = Q(z_0)$ und $Q'(z_0) \neq 0$. Zeigen Sie dass das Residuum von P/Q an der Stelle z_0 gleich $P(z_0)/Q'(z_0)$ ist.

2. Berechnen Sie mittels komplexer Integrationstheorie die uneigentlichen Integrale:
$$\text{(a)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4}, \qquad \text{(b)} \int_0^{\pi} \frac{dx}{2+\cos x}, \qquad \text{(c)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2-2x+2}\, dx.$$
Hinweis zu (b): Verwenden Sie die Substitution
$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

3. Entwickeln Sie
$$f(z) := \frac{z - \sin z}{z^3}$$
in $z_0 = 0$ in eine Laurentreihe. Geben Sie den Gültigkeitsbereich und die Art der Singularität an.

4. Entwickeln Sie
$$f(z) := \frac{1}{(z-1)(2-z)}$$
in eine Laurentreihe gültig für
(a) $|z| < 1$,
(b) $1 < |z| < 2$,
(c) $|z| > 2$,
(d) $|z-1| > 1$,
(e) $0 < |z-2| < 1$.