6. Proseminar zur Einführung in die komplexe Analysis

22.11.2010

1. Sei $p(z) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu z^\nu$ ein komplexes Polynom vom Grad n. Zeigen Sie: Es existiert $R > 0$, so dass für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \geq R$ ist
$$\frac{1}{2}|a_n|\,|z|^n \leq |p(z)| \leq 2|a_n|\,|z|^n.$$

2. Finden Sie einen direkten Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra, der auf dem Minimumprinzip beruht.

   Hinweis: Bestimmen Sie ein $s > 0$, so dass $|p(0)| < \frac{1}{2}|a_n|s^n$ und wenden Sie 1. an.

3. Beweisen Sie die folgende Verallgemeinerung des Satzes von Liouville: Sei f eine ganze Funktion. Es gebe $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ und reelle Konstanten $R, M > 0$ so dass $|f(z)| \leq M|z|^n$ für $|z| \geq R$. Dann ist f ein Polynom vom Grad kleiner gleich n.

4. Beweisen Sie: Sei f eine ganze transzendente Funktion (also kein Polynom), dann gibt es zu jedem $w_0 \in \mathbb{C}$ eine Folge $(z_n)_{n\geq 0}$ in $\mathbb{C}$ mit $\lim_{n\to\infty} |z_n| = \infty$ und $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = w_0$. (D.h., für jedes $R > 0$ liegt das Bild $f(\{z \in \mathbb{C} : |z| > R\})$ dicht in $\mathbb{C}$.)

   Hinweis: Indirekter Beweis: Es gebe $w_0 \in \mathbb{C}$, $R, \varepsilon > 0$ so dass für alle z mit $|z| > R \geq 1$ gilt $|f(z) - w_0| \geq \varepsilon$.

   In der abgeschlossenen Kreisscheibe um 0 vom Radius R gibt es nur endlich viele Stellen $b_1, \ldots, b_r$ so dass $f(b_j) = w_0$. Diese w_0-Stellen treten mit der Vielfachheit $n_1, \ldots, n_r$ auf.

   Durch
$$g(z) := \frac{f(z) - w_0}{\prod_{j=1}^{r}(z - b_j)^{n_j}}$$
   wird eine ganze Funktion ohne Nullstellen definiert. Untersuchen Sie $1/g$.