4. Proseminar zur Einführung in die komplexe Analysis

8.11.2010

1. Bestimmen Sie die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!} z^n, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} z^{n^2}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} 2^{2n} z^{2n}.$$

2. Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Reihe $\sum_{n\geq 1} z^n/n^2$, beweisen Sie, dass die Reihe in allen Punkten des Randes des Konvergenzkreises endliche Werte annimmt, und dass dies für die Ableitung jedoch nicht gilt.

3. (a) Für $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ sei $G_n = \{c \in \mathbb{C} \mid c^n = 1\}$ die Menge der n-ten Einheitswurzeln. Zeigen Sie, dass $H := \bigcup_{n\geq 0} G_{2^n}$ dicht im Rand des Einheitskreises liegt.

   Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass $M = \left\{ \frac{2\pi m}{2^n} \mid m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N} \right\}$ dicht in $\mathbb{R}$ liegt, und verwenden Sie, dass Bilder von dichten Mengen unter stetigen Funktionen wiederum dicht sind.

   (b) Bestimmen Sie den Konvergenzradius von $\sum_{n\geq 0} z^{2^n}$ und untersuchen Sie das Verhalten dieser Reihe am Konvergenzkreis.

4. Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\oint_{\mathcal{C}_i} \bar{z}\, dz, \qquad i \in \{a, b\},$$

   (a) über den positiv orientierten Einheitskreis $\mathcal{C}_a$ (b) über das positiv orientierte Einheitsquadrat $\mathcal{C}_b$.

5. Berechnen Sie die folgenden Kurvenintegrale

$$\text{(a)} \oint_{C_a} \frac{z^2 + z + 1}{(z-i)^2}\, dz, \qquad \text{(b)} \oint_{C_b} \frac{e^z}{(z+1)^3}\, dz, \qquad \text{(c)} \oint_{C_c} \frac{z}{(z+1)(z+3)}\, dz,$$

   wobei C_a das positiv orientierte Rechteck mit Ecken $-1, 1, 1+2i, -1+2i$, C_b den Kreis mit Radius 2 um $z = 0$ und C_c das Rechteck mit Ecken $2 \pm i$ und $-2 \pm i$ bezeichnen.

6. Für die ganze Funktion f existiere $M \in \mathbb{R}$, so dass für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt $\Re f(z) \leq M$. Beweisen Sie, dass f konstant ist.

   Hinweis: Untersuchen Sie $\exp \circ f$.

7. Seien ω_1 und ω_2 über $\mathbb{R}$ linear unabhängige komplexe Zahlen. Die ganze Funktion f erfülle $f(z) = f(z + \omega_1) = f(z + \omega_2)$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass f konstant ist.

   Hinweis: Verwenden Sie die Periodizität von f, um zu zeigen, dass die Werte von f auf $\mathbb{C}$ bereits als Werte von f auf einer kompakten Teilmenge von $\mathbb{C}$ angenommen werden.