3. Proseminar zur Einführung in die komplexe Analysis

18.10.2010

1. Berechnen Sie alle komplexen Logarithmen von i, $-$i, -1, $x \in \mathbb{R}_{>0}$, $1 + \mathrm{i}$.

2. Für $a \in \mathbb{C}^- = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} \mid \Im z = 0 \text{ und } \Re z \leq 0\}$, $b \in \mathbb{C}$, sei a^b definiert als $\exp(b \operatorname{Log} a)$, wobei $\operatorname{Log}\colon \mathbb{C}^- \to \mathbb{C}$ der Hauptzweig des Logarithmus ist, d.h. $\operatorname{Log} z = \ln|z| + \mathrm{i} \operatorname{Arg} z$ mit $-\pi < \operatorname{Arg}(z) < \pi$. Berechnen Sie $\big(\mathrm{i}(\mathrm{i}-1)\big)^{\mathrm{i}}$ und $\mathrm{i}^{\mathrm{i}}(\mathrm{i}-1)^{\mathrm{i}}$.

3. Untersuchen Sie, wo der Hauptzweig des Logarithmus komplex differenzierbar ist.

4. Wo ist f komplex differenzierbar?

   (a) $f(x + \mathrm{i}y) = xy + \mathrm{i}xy$

   (b) $f(x + \mathrm{i}y) = -6(\cos x + \mathrm{i} \sin x) + (2 - 2\mathrm{i})y^3 + 15(y^2 + 2y)$

5. Bestimmen Sie zu $u\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ jeweils alle Funktionen $v\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, so dass $u + \mathrm{i}v$ in $\mathbb{C}$ komplex differenzierbar ist.

   (a) $u(x, y) = 2x^3 - 6xy^2 + x^2 - y^2 - y$

   (b) $u(x, y) = x^2 - y^2 + e^{-y} \sin x - e^y \cos x$

6. Sei $a \in \mathbb{R}_{>0}$. Unter Verwendung der Cauchyschen Integralformel zeigen Sie, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x+\mathrm{i}a)^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}.$$

   Hinweis:

   (a) Bestimmen Sie $\int_\gamma f(\zeta) d\zeta$ der Funktion $f(z) = \mathrm{e}^{-z^2}$ längs des Weges γ, der die Summe der Strecken $[-R, R]$, $[R, r + a\mathrm{i}]$, $[R + a\mathrm{i}, -R + a\mathrm{i}]$, $[-R + a\mathrm{i}, -R]$ ist, mit $R \in \mathbb{R}_{>0}$. Die Strecke $[u, v]$ mit $u, v \in \mathbb{C}$ ist definiert als

$$\big\{u + t(v - u) \bigm| t \in [0, 1]\big\}.$$

   (b) Zeigen Sie, dass

$$\lim_{R\to\infty} \left| \int_{[R, R+a\mathrm{i}]} f(\zeta) d\zeta \right| = \lim_{R\to\infty} \left| \int_{[-R+a\mathrm{i}, -R]} f(\zeta) d\zeta \right| = 0$$

   ist.

   (c) Sie dürfen verwenden, dass $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ ist.

Falls wir zu wenig Zeit haben, sollten Sie die Beispiele 1., 4. und 5. schriftlich vorbereiten und bei mir abgeben.