2. Proseminar zur Einführung in die komplexe Analysis

11.10.2010

1. Sei $p(z) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j z^j + z^n$ ein normiertes komplexes Polynom vom Grad $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. Geben Sie Beziehungen zwischen den Koeffizienten a_0, a_{n-1} und den n Nullstellen $z_1, \ldots, z_n$ von p an.

2. Beweisen Sie für $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$:

$$\begin{aligned} \cos\frac{2\pi}{n} + \cos\frac{4\pi}{n} + \cdots + \cos\frac{2(n-1)\pi}{n} &= -1 \\ \sin\frac{2\pi}{n} + \sin\frac{4\pi}{n} + \cdots + \sin\frac{2(n-1)\pi}{n} &= 0. \end{aligned}$$

3. Sei $n \in \mathbb{Z}_{n\geq 1}$ und $W(n) := \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$, die Menge der n-ten Einheitswurzeln. Zeigen Sie:

   (a) $W(n)$ ist eine Untergruppe von $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

   (b) $W(n)$ ist eine zyklische Gruppe der Ordnung n. (D.h., es gibt $\zeta \in W(n)$, so dass $W(n) = \{\zeta^\nu \mid 0 \leq \nu < n\}$. Ein solches ζ heißt primitive n-te Einheitswurzel.)

   (c) Wieviele primitive n-te Einheitswurzeln gibt es.

4. Sei $z = x + \mathrm{i}y$ mit $x, y \in \mathbb{R}$. Stellen Sie Real- und Imaginärteil der Funktionen $\sin z$, $\tan z$ und $\cosh z$ als Funktionen von x und y dar. Prüfen Sie die Gültigkeit der Cauchy–Riemannschen-Gleichungen für diese Funktionen.

5. Seien (x, y) bzw. (r, φ) kartesische bzw. Polarkoordinaten in der z-Ebene und (u, v) bzw. (R, Φ) kartesische bzw. Polarkoordinaten in der w-Ebene. Stellen Sie die Cauchy–Riemannschen Gleichungen für $(x, y) \mapsto (R, \Phi)$, $(r, \varphi) \mapsto (u, v)$ und $(r, \varphi) \mapsto (R, \Phi)$ auf. Verwenden Sie die gefundenen Gleichungen, um alle holomorphen Funktionen zu bestimmen, für die R nur von x bzw. nur von r abhängt.