10. Proseminar zur Einführung in die komplexe Analysis

17.1.2011

1. Finden Sie einen zweiten Beweis für die Aufgabe 4.6:

   Für die ganze Funktion f existiere $M \in \mathbb{R}$, so dass für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt $\Re f(z) \leq M$. Beweisen Sie, dass f konstant ist.

2. Gegeben seien zwei ganze Funktionen f und g ohne gemeinsame Nullstellen. Zeigen Sie, dass zwei ganze Funktionen a und b existieren, sodass $af + bg = 1$.

   Hinweis: Nutzen Sie den Satz von Mittag-Leffler, um eine geeignete meromorphe Funktion M zu finden, die genau in den Nullstellen von g die Hauptteile von $1/(fg)$ in diesen Stellen besitzt. Also ist $M - 1/(fg)$ holomorph in den Nullstellen von g.

3. Sei f eine ganze Funktion. Es gebe $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ und reelle Konstanten $R, M > 0$ so dass $|\Re(f(z))| \leq M|z|^n$ für $|z| \geq R$. Was kann man dann über f aussagen?