1. Proseminar zur Einführung in die komplexe Analysis

4.10.2010

1. Bestimmen Sie die komplexen Nullstellen des quadratischen Polynoms
$$z^2 - (3 - \mathrm{i})z + (2 - 6\mathrm{i}).$$

2. Welche Kurven in der komplexen Ebene werden durch die folgenden Gleichungen definiert?
   (a) $|z - \mathrm{i}| = 2$
   (b) $\Re(z^2) = 1$
   (c) $|z + \mathrm{i}| + |z - \mathrm{i}| = 2\sqrt{2}$.

3. Für α, β, $\gamma \in \mathbb{C}$ beweisen Sie: Die Menge $\{z \in \mathbb{C} \mid z\bar{z} + \alpha z + \beta\bar{z} + \gamma = 0\}$ ist genau dann eine Kreislinie bezüglich der Euklidischen Metrik, wenn $\bar{\alpha} = \beta$ und $\alpha\beta - \gamma > 0$.

4. Zeigen Sie, dass die Menge $\mathcal{H}$ der Hamiltonschen Quaternionen,
$$\mathcal{H} := \left\{ \begin{pmatrix} w & -z \\ \bar{z} & \overline{w} \end{pmatrix} \;\middle|\; z, w \in \mathbb{C} \right\},$$
zusammen mit der gewöhnlichen Matrizenaddition und -multiplikation ein Schiefkörper aber kein Körper ist. Hinweis: Ein Schiefkörper erfüllt alle Eigenschaften eines Körpers mit Ausnahme der Kommutativität der Multiplikation.

5. Beweisen oder widerlegen Sie: $\mathcal{H}$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. $\mathcal{H}$ ist ein $\mathbb{C}$-Vektorraum. Wenn möglich bestimmen Sie die jeweiligen Dimensionen von $\mathcal{H}$.

6. Stellen Sie die Multiplikationstafel von $\pm\mathbf{1}$, $\pm\mathbf{i}$, $\pm\mathbf{j}$ und $\pm\mathbf{k}$ auf, wobei
$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{i} = \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}$$
Elemente von $\mathcal{H}$ sind. Bestimmen Sie
$$\left\{X \in \mathcal{H} \mid X^2 = \mathbf{1}\right\}, \qquad \left\{X \in \mathcal{H} \mid X^2 = -\mathbf{1}\right\}.$$