Proseminar Analysis I, SS 11

Blatt 10

1. Für $n \in \mathbb{N}$ seien die Funktionen $f_n \colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ und $g_n \colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f_n(x) = \begin{cases} 1/x + 1/n & \text{falls } x > 0 \\ 1/n & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

$g_n(x) = 1/n$ für alle $x \in [0,\infty)$. Beweisen Sie, dass $(f_n)_{n\geq 1}$ und $(g_n)_{n\geq 1}$ gleichmäßig auf $[0,\infty)$ aber $(f_n \cdot g_n)_{n\geq 1}$ nicht gleichmäßig auf $[0,\infty)$ konvergiert.

2. Beweisen Sie Theorem IV-3.6.

3. Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für die die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (1 + (-1)^n) n^3 x^n$$

konvergiert.

4. Untersuchen Sie die Funktionenreihe auf $\mathbb{R}$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sqrt{m+1}}{m^2 + x^2}$$

auf punktweise Konvergenz und gleichmäßige Konvergenz.

5. Bestimmen Sie die ersten 4 Terme der Potenzreihe von

$$f(x) = \frac{1}{e}(1+x)^{\frac{1}{x}}$$

mit Hilfe der Potenzreihenentwicklung von $\ln(1+x)$ und berechnen Sie

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - 1}{x}$$