Name: .... **Matrikelnr.:** ....

EINFÜHRUNG IN DIE ALGEBRA   Vorlesung   SS 2012

Klausur am 27. 6. 2012

1. **(8 Punkte)**
   a) Formulieren Sie den Struktursatz für endliche abelsche Gruppen

   b) Wieviele abelsche Gruppen der Ordnung 80 gibt es (bis auf Isomorphie)? Schreiben Sie alle auf.

2. **(8 Punkte)**
   Wir betrachten den Restklassenring $\mathbb{Z}/(n)$. Zu welchen beiden Aussagen ist die Aussage "$\mathbb{Z}/(n)$ *ist ein Körper*" äquivalent?
   Formulieren und beweisen Sie den entsprechenden Satz.

3. **(6 Punkte)**
   a) Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe und $\emptyset \neq \; H \subseteq G$ eine Teilmenge mit der Eigenschaft "für alle $a, b \in H$ ist $a \cdot b \in H$".
   Ist H eine Untergruppe von G? Beweis oder Gegenbeispiel.

   b) **Richtig oder falsch** (ohne Begründung).

   i) Ist das Ideal $I \triangleleft \; R$ ist prim, so ist R/I ein Integritätsbereich.
   ii) $\sqrt{5}$ ist algebraisch unabhängig über dem Unterring $\mathbb{Z}$ von $\mathbb{R}$.

4. **(8 Punkte)**
   a) Schreiben Sie die Definition eines Ideals in einem Ring R auf. Geben Sie ein Beispiel für einen nicht kommutativen Ring an.

   b) Sei $M \subseteq \mathbb{R}$ eine Menge und

   $$I_M := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) = 0 \;\forall\; x \in M\}.$$

   Zeigen Sie, dass I_M ein Ideal in $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ist.
   Zusatz: Wie sehen die trivialen Ideale in der Form I_M aus?