Name: .... **Matrikelnr.:** ....

EINFÜHRUNG IN DIE ALGEBRA Vorlesung SS 2012

Klausur am 27. 6. 2012

1. **(8 Punkte)**
   Sei $I \lhd R$ ein Ideal in einem kommutativen Ring $(R, +, \cdot)$. Zu welcher Aussage über R/I ist die Aussage "I ist ein maximales Ideal in R" äquivalent? Formulieren und beweisen Sie den entsprechenden Satz.

2. **(6 Punkte)**
   a) **Richtig oder falsch** (ohne Begründung).

   i) Ist das Ideal $I \lhd R$ ist prim, so ist R/I ein Integritätsbereich.
   ii) $\sqrt{7}$ ist algebraisch unabhängig über dem Unterring $\mathbb{Z}$ von $\mathbb{R}$.

   b) Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe und $\emptyset \neq H \subseteq G$ eine Teilmenge mit der Eigenschaft "für alle $a, b \in H$ ist $a \cdot b \in H$".
   Ist H eine Untergruppe von G? Beweis oder Gegenbeispiel.

3. **(8 Punkte)**
   a) Formulieren Sie den Struktursatz für endliche abelsche Gruppen

   b) Wieviele abelsche Gruppen der Ordnung 72 gibt es (bis auf Isomorphie)? Schreiben Sie alle auf.

4. **(8 Punkte)**
   a) Schreiben Sie die Definition eines Nullteilers in einem Ring R auf. Finden Sie ein m mit der Eigenschaft, dass $\mathbb{Z}/(m)$ von Null verschiedene Nullteiler hat und geben Sie einen dieser von Null verschiedenen Nullteiler an

   b) Wir betrachten den Ring $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Zeigen Sie:
   $f \in \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ist ein Nullteiler $\Longleftrightarrow 0 \in f(\mathbb{R})$.
   Zusatz: gilt $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})^\times \,\dot\cup\, \mathrm{NT}(\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}))$?