Homologische Algebra und modulare Darstellungstheorie, SS 2014

Karin Baur

März 2014

Inhaltsverzeichnis

II Modulare Darstellungstheorie 77

Einleitung

Die Vorlesung beschränkt sich oft auf die Kategorie der Moduln über einer Gruppenalgebra einer endlichen Gruppe G. Dies ist ein guter Spezialfall der allgemeineren Theorie.

Was nicht zum Material gehört:

- Breiter Hintergrund der Kategorientheorie
- Bezüge zur algebraischen Topologie

Um die späteren Verallgemeinerungen nicht zu verhindern sind die Beweise der homologischen Sätze möglichst allgemein gehalten.

Herzlichen Dank für die Meldung von Fehlern im Skript!

Teil I

Homologische Algebra

Kapitel 1

Vorbereitung

[Vorlesung 1, 3.3.2014]

Hier etwas Hintergrundmaterial. Literatur zu Kategorien und Funktoren:

- [McL], 1.7 und 1.8
- [R]

1.1 Kategorien und Funktoren

Definition. Eine *Kategorie* $\mathcal{C}$ besteht aus folgenden Daten:

(i) Einer Klasse von *Objekten*, geschrieben $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$.

(ii) Für alle $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ eine Menge $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, die *Morphismen von* X *nach* Y.

(iii) Einer *Komposition (Verknüpfung)* $\circ$:

$$\begin{gathered} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z) \\ (f, g) \to g \circ f \quad (=: gf) \end{gathered}$$

Mit den Eigenschaften

(iv) Die Verknüpfung ist assoziativ.

(v) Für jedes $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ existiert ein *Identitätsmorphismus* $1_X \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$, so dass für alle $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ und $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$ gilt

$$f\,1_X = f, \quad 1_X\, g = g.$$

Die Morphismen werden oft auch *Pfeile* genannt.

Definition. Ein Morphismus $\psi : X \to Y$ in einer Kategorie $\mathcal{C}$ heisst *Isomorphismus*, wenn es einen Morphismus $\phi : Y \to X$ gibt mit $\phi \circ \psi = 1_X$, $\psi \circ \phi = 1_Y$.

Definition. 1) Eine *Unterkategorie* $\mathcal{D}$ von $\mathcal{C}$ ist eine Kategorie $\mathcal{D}$ deren Objekte eine Teilklasse der Objekte von $\mathcal{C}$ sind und so dass für je zwei Objekte X, Y von $\mathcal{D}$ die Morphismenmenge $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X,Y)$ eine Teilmenge von $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ ist. Dabei ist Komposition von Pfeilen in $\mathcal{D}$ dieselbe wie diejenige in $\mathcal{C}$.

2) $\mathcal{D}$ heisst *volle Unterkategorie*, falls $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X,Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ für alle $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$.

Beispiele. Hier sind ein paar Beispiele von Kategorien, die oft vorkommen. Wichtig sind für uns vor allem das zweite und das letzte Beispiel, die Kategorie der Moduln über einem Ring.

1. $\mathcal{C} = \mathbf{Sets}$, die Kategorie der Mengen. Objekte sind die Mengen, Morphismen sind die Abbildungen zwischen Mengen. Verknüpfung ist die Verknüpfung von Funktionen und die Identitätsabbildung ist $1_A(a) = a$ für alle $a \in A$, $A \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Sets})$.

2. Die Kategorie **Ab** der abelschen Gruppen. Objekte sind die abelschen Gruppen, Morphismen sind die Homomorphismen von Gruppen. Verknüpfung ist die übliche Verknüpfung von Homomorphismen.
   Analog gibt es die Kategorien **Gruppen** und **Ringe**.

3. $(I, \leq)$ eine quasi-geordnete Menge (i.e. $\leq$ ist reflexiv und transitiv, reflexiv: $s \leq s$ für alle $s \in I$, transitiv: aus $s \leq t$ und $t \leq u$ folgt $s \leq u$). Wir können eine Kategorie $\mathcal{I}$ definieren wie folgt: $\mathrm{Ob}(\mathcal{I}) = I$ und die Morphismen sind

$$\mathrm{Hom}(x,y) := \begin{cases} \{i_y^x\} & x \leq y \\ \emptyset & \text{sonst} \end{cases}$$

   (wobei i_y^x ein Symbol ist). Die Verknüpfung ist

$$i_z^y i_y^x := i_z^x \quad (x \leq y \leq z)$$

4. Eine Gruppe G definiert eine Kategorie mit einem Objekt, nämlich G selbst und einem Morphismus (Linksmultiplikation mit $y \in G$), $l_y : G \to G$, $l_y(g) = yg$ $(g \in G)$ für jedes $y \in G$.

5. Die Kategorie der topologischen Räume: als Objekte die top. Räume, als Morphismen die stetigen Abbildungen.

6. $\mathcal{C} = R$-**Mod**, für einen Ring R, die Kategorie der *(links-)R-Moduln*. Hier sind die Objekte die R-Moduln[1] und die Morphismen sind die R-Modulhomomorphismen.
   Eine Unterkategorie von R-**Mod** ist die Kategorie R-**mod** der *endlich erzeugten (links-)R-Moduln.*
   Analog gibt es **Mod-**R und **mod-**R, die Kategorien der rechts-R-Moduln und der endlich erzeugten rechts-R-Moduln.

---

[1] Für die Definition von Moduln: Kapitel 1.2.

Ausserdem kann man die Kategorie der (R, S)-Bimoduln R-**Mod**-S betrachten (R, S zwei Ringe). Ist M ein links-R-Modul und ein rechts S-Modul, so dass gilt

$$(r \cdot m) \cdot s = r \cdot (m \cdot s) \quad \forall\, r \in R, s \in S, m \in M$$

so heisst M ein (R, S)-*Bimodul*.

Bemerkung. Unter einem Ring R verstehen wir eine Menge R mit zwei (inneren) binären Verknüpfungen, $+$ und $\cdot$, so dass folgendes gilt:

- $(R, +)$ ist eine abelsche (oder kommutative) Gruppe mit 0 als neutralem Element;
- die Multiplikation $\cdot$ ist assoziativ;
- es gelten die Distributivgesetze, d. h. für alle $a, b, c \in R$ ist $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ und $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$.

Hat R ein neutrales Element bezüglich der Multiplikation $\cdot$, so heisst dieses das Einselement (die Eins) des Rings, geschrieben 1 oder auch 1_R. Wir betrachten hier immer Ringe mit 1.

Nun also zu den Moduln.

1.2 Moduln

Es bezeichne Λ einen Ring mit 1.

Definition. (1) Ein *(links-)*Λ-*Modul* ist eine abelsche Gruppe A mit einer Operation vom Ring Λ auf A, $(\lambda, a) \mapsto \lambda a$

(i) $\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b$

(ii) $(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$

(iii) $(\lambda\mu)a = \lambda(\mu a)$

(iv) $1a = a$

(2) Der Begriff der rechts-Moduln ist analog definiert.

Bemerkung.

- Ist Λ kommutativ (abelsch), so stimmen links- und rechts-Λ-Moduln überein (bis auf Schreibweise).
- Oft lassen wir "(links-)" weg und sprechen einfach von Λ-Moduln. (Zur Unterscheidung wird dann bei rechts-Λ-Moduln "rechts" immer geschrieben).

Notationen: λ, μ, etc. werden oft für Elemente vom Ring Λ verwendet, a, b etc. für Elemente des Λ-Moduls A.

Beispiele. Überlege, dass die Eigenschaften (i)-(iv) bei den folgenden Beispielen erfüllt sind.

(a) Sei $\Lambda = K$ ein Körper. Die Λ-Moduln sind gerade die K-Vektorräume. Der Begriff des Moduls ist also eine Verallgemeinerung des Begriffs des Vektorraums.

(b) Jede abelsche Gruppe ist auf eindeutige Weise ein $\mathbb{Z}$-Modul: Sei $\Lambda = \mathbb{Z}$, A eine abelsche Gruppe. Man hat $1 \cdot a = a$, $0 \cdot a = 0$ und $n \cdot a = a + a + \cdots + a$ (n-fach, für $n > 0$), $n \cdot a = -(-n) \cdot a$ für $n < 0$. Damit ist A ein Λ-Modul. Die Kategorien **Ab** der abelschen Gruppe und $\mathbb{Z}$-Mod der $\mathbb{Z}$-Moduln stimmen überein.

(c) Sind A, B zwei Λ-Moduln, so ist auch $A \oplus B$ ein Λ-Modul.

Definition. Ein Λ-*Modulhomomorphismus* $\varphi : A \to B$ ist ein Homomorphismus von abelschen Gruppen mit $\varphi(\lambda a) = \lambda(\varphi(a))$ (für alle $\lambda \in \Lambda$, $a \in A$).

1.3 Tensorprodukt über einem Ring

Sei Λ ein Ring mit 1 (wir werden immer Ringe mit 1 betrachten, also von nun an meistens den Zusatz "mit 1" weglassen). Sei A ein rechts-Λ-Modul und B ein links-Λ-Modul.

Definition. Das *Tensorpodukt* von A und B ist die abelsche Gruppe $A \otimes_\Lambda B$, die der Quotient der freien abelschen Gruppe in den Erzeugern $a \otimes b$ ($a \in A$, $b \in B$) nach der Untergruppe, die von

- $(a_1 + a_2) \otimes b - a_1 \otimes b - a_2 \otimes b$
- $a \otimes (b_1 + b_2) - a \otimes b_1 - a \otimes b_2$
- $a\lambda \otimes b - a \otimes \lambda b$

($a_i \in A$, $b_i \in B$, $\lambda \in \Lambda$) erzeugt wird, ist.

Ist A ein (Λ, Λ)-Bimodul, so ist das Tensorprodukt $A \otimes_\Lambda B$ ebenfalls ein links-Λ-Modul. (Allgemeiner: ist A ein (R, Λ)-Bimodul und B ein links-Λ-Modul, so ist $A \otimes_\Lambda B$ ein links R-Modul). Man kann das Tensorprodukt $A \otimes_\Lambda B$ von A und B über seine universelle Eigenschaft definieren, siehe dazu die erste Übungsserie.

Beispiel. Sei V ein beliebiger Vektorraum mit Basis $\{v_1, \ldots, v_r\}$, $r > 1$. Betrachte $V \otimes V$. Man überlege, dass es keine zwei Vektoren v, $w \in V$ gibt, so dass der Vektor $v_1 \otimes v_2 + v_2 \otimes v_1$ geschrieben werden kann als $v \otimes w$.

1.4 Kategorien und Funktoren

Sei K ein Körper. Eine Kategorie $\mathcal{C}$ heisst *K-linear*, falls die Menge $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ ein K-Vektorraum ist und die Verknüpfung $\circ$ bilinear ist für alle Objekte X,Y von $\mathcal{C}$. In diesem Fall gibt es zwischen beliebigen zwei Objekten X,Y die Nullabbildung (das Nullelement in der Menge der Homomorphismen).

Definition. Die *duale Kategorie* $\mathcal{C}^{\mathrm{opp}}$ zu einer Kategorie $\mathcal{C}$ ist die Kategorie mit Objekten $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}^{\mathrm{opp}})$=$\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ und Morphismen

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathrm{opp}}}(X,Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,X)$$

für alle $X,Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$. Die Verknüpfungsabbildung muss entsprechend angepasst werden.

Kurz gesagt: die Pfeile in $\mathcal{C}^{\mathrm{opp}}$ zeigen alle in die andere Richtung. Es ist $(\mathcal{C}^{\mathrm{opp}})^{\mathrm{opp}} = \mathcal{C}$.

Nun kommen wir zu Funktoren. Ein Funktor ist ein Abbildung zwischen zwei Kategorien, die verträglich ist mit der Struktur der Kategorien. Ein Funktor besteht aus einem Paar von Abbildungen: einer Abbildung für die Objekte und einer für die Morphismen. Für beide wird die gleiche Notation verwendet:

Definition. Seien $\mathcal{C}$ and $\mathcal{D}$ Kategorien. Ein *(kovarianter) Funktor* $F : \mathcal{C} \to D$ besteht aus folgenden Daten:

- eine Zuordnung $F : \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$,
- einer Abbildung $F : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X),F(Y))$ für je zwei Objekte X, Y von $\mathcal{C}$.

Dabei müssen die Abbildungen zwischen den Morphismenmengen folgendes erfüllen:

(i) Sie sind kompatibel mit Verknüpfung, i.e. $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$ für alle f, g, für die $f \circ g$ definiert ist.

(ii) Sie erhalten Identitätsmorphismen, i.e. $F(1_X) = 1_{F(X)}$ für alle $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$.

Definition. Ein *kontravarianter Funktor* von $\mathcal{C}$ nach $\mathcal{D}$ ist ein (kovarianter) Funktor $\mathcal{C}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{D}$.

Analog zur Definition von kovarianten Funktoren kann man kontravariante Funktoren wie folgt definieren: F besteht aus einer Zuordnung $F : \mathrm{Ob}(\mathcal{C}^{\mathrm{opp}})$=$\mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$, und einer Abbildung $F : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(Y),F(X))$ für X, Y beliebige Objekte in $\mathcal{C}^{\mathrm{opp}}$ (i.e. Objekte in $\mathcal{C}$), so dass gilt

(i') $F(f \circ g) = F(g) \circ F(f)$

(ii) $F(1_X) = 1_{F(X)}$

Falls wir einfach von Funktoren sprechen, so meinen wir meistens kovariante Funktoren.

Beispiel. Sei $\mathcal{C} \subset \mathcal{M}$ eine Unterkategorie einer Kategorie $\mathcal{M}$ von R-Moduln (R ein Ring mit 1), i.e. die Objekte von $\mathcal{C}$ sind auch R-Moduln. Sei M ein R-Modul. Dann ist der sogenannte *hom-Funktor* $F := \mathrm{Hom}_R(M, -)$, eine Abbildung $F : \mathcal{C} \to \mathbf{Ab}$ von $\mathcal{C}$ in die Kategorie abelscher Gruppen, wie folgt definiert ("f nachschalten"):
$X \mapsto \mathrm{Hom}_R(M, X)$ und auf der Ebene der Morphismen ist $F(f) : \mathrm{Hom}_R(M, X) \to \mathrm{Hom}_R(M, Y)$ (für $f : X \to Y$) die Abbildung $F(f) : g \mapsto f \circ g$.
Man prüft nach, dass dies einen Funktor definiert.

Bemerkung. Man sagt, dass der Funktor F aus obigem Beispiel *durch M repräsentiert wird.* Allgemeiner ist es eine wichtige Frage, ob ein beliebiger Funktor G von einer Kategorie $\mathcal{C}$ in die Kategorie $\mathcal{D}$ (der abelschen Gruppen) durch ein Objekt repräsentiert werden kann, i.e. ob es ein Objekt $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ gibt, so dass G gerade gegeben ist durch $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, -)$. (cf. [HS] Seite 46 oben).

Nun zur Äquivalenz von Kategorien:

Definition. Sind $F, F' : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ zwei (kovariante) Funktoren, so ist eine *natürliche Transformation* eine Zuordnung $\varphi : F \to F'$, die jedem Objekt $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ eine Abbildung $\varphi_X : F(X) \to F'(X)$ zuordnet, so dass für jeden Morphismus $f : X \to Y$ in $\mathcal{C}$ gilt

$$\varphi_Y \circ F(f) = F'(f) \circ \varphi_X.$$

Mit andern Worten: man verlangt, dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
F(X) \arrow[r, "\varphi_X"] \arrow[d, "F(f)"'] & F'(X) \arrow[d, "F'(f)"'] \\
F(Y) \arrow[r, "\varphi_Y"] & F'(Y)
\end{tikzcd}$$

kommutiert. Sind F und F' kontravariant, so verlangt man analog, dass das Diagramm mit Pfeilen aufwärts kommutiert.

φ heisst ein *natürlicher Isomorphismus*, falls φ_X ein Isomorphismus ist für jedes $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$.

Definition. Eine *Äquivalenz von Kategorien* ist ein Paar von Funktoren $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$, so dass die Verknüpfungen $F \circ G$ und $G \circ F$ natürlich isomorph sind zu den entsprechenden Identitätsfunktoren.

[Vorlesung 2, 17.3.]

1.5 Mehr zu Moduln

Ist $\varphi : A \to B$ ein Λ-Modulhomomorphismus, so ist $\ker \varphi$ ein Λ-Untermodul von A und $\mathrm{im}\, \varphi$ ein Untermodul von B.

Definition. Die Folge $A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C$ von Λ-Moduln heisst *exakt (in B)*, falls $\ker \psi = \operatorname{im} \varphi$.

Beispiele. (a) $0 \to B \xrightarrow{\psi} C$ ist genau dann exakt, wenn ψ injektiv ist.

(b) $A \xrightarrow{\varphi} B \to 0$ ist genau dann exakt, wenn φ surjektiv ist.

(c) $0 \to A \xrightarrow{\varphi} B \to 0$ ist genau dann exakt, wenn φ ein Isomorphismus ist.

(d) Ist $0 \to A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C \to 0$ in A, B und C exakt, so sprechen wir von einer *kurzen exakten Folge* (von Λ-Moduln). Das bedeutet, dass φ injektiv und ψ surjektiv ist und ψ einen Isomorphismus $C \cong B/\operatorname{im}\varphi$ induziert.

Man nennt $B/\operatorname{im}\varphi$ den *Cokern von φ* (und $A/\ker\varphi$ das *Cobild von φ*).

Zur Abkürzung werden kurze exakte Folgen $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ auch einfach

$$A' \hookrightarrow A \twoheadrightarrow A''$$

geschrieben (also $\hookrightarrow$ für injektive Abbildungen, $\twoheadrightarrow$ für surjektive Abbildungen). Man sagt auch kurze exakte Sequenz, kurz s.e.s. (short exact sequence).

Satz 1.1. *Es sei $0 \to A \xrightarrow{\mu} B \xrightarrow{\varepsilon} C \to 0$ eine kurze exakte Folge. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) Es existiert ein Λ-Modulhomomorphismus $\sigma : C \to B$ mit $\varepsilon \circ \sigma = 1_C$.

(ii) Es existiert ein Λ-Modulhomomorphismus $\tau : B \to A$ mit $\tau \circ \mu = 1_A$.

(iii) Es existiert ein Λ-Modulhomomorphismus $\beta : B \to A \oplus C$, so dass das folgende Diagramm kommutativ ist:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, equal] & B \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "\beta"] & C \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "1_A"] & A \oplus C \arrow[r, "\pi_C"] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

In diesem Fall sagt man auch, die kurze exakte Folge zerfalle.

Beweis. Es ist klar, dass aus (iii) sowohl (i) als auch (ii) folgen.
Wir zeigen (i) $\Rightarrow$ (iii), die Richtung (ii) $\Rightarrow$ (iii) folgt analog.
Behauptung: Es ist $B \cong \ker\varepsilon \oplus \operatorname{im}\sigma$.

Einerseits ist $\ker\varepsilon \cap \operatorname{im}\sigma = \{0\}$: Ist x im Durchschnitt, so ist $\varepsilon(x)$ in $\varepsilon\mu(A) = 0$ ($\ker\varepsilon$ ist ja $\operatorname{im}\mu$). Ausserdem ist dann $x = \sigma(y)$ für ein $y \in C$ und

$$\varepsilon(x) = \varepsilon\sigma(y) = y = 0,$$

also $0 = \sigma(0) = \sigma(y) = x$.

Andrerseits ist $B \cong \ker\varepsilon + \operatorname{im}\sigma$: Sei $b' = b - \sigma\varepsilon b$. Dann gilt $\varepsilon b' = \varepsilon b - \varepsilon\sigma\varepsilon b = \varepsilon b - \varepsilon b = 0$, also ist b' im Kern von ε. Ausserdem ist natürlich $\sigma\varepsilon b$ im Bild von σ. Damit ist $b = \sigma\varepsilon b + b'$ die gesuchte Aufspaltung. ☐

Ist $\alpha : A \to B$ ein Λ-Modulhomomorphismus, so heisst eine Abbildung $\beta : B \to A$ mit $\beta\alpha = 1_A$ ein *links Inverses* zu α. Die Abbildung τ in (ii) ist also ein links Inverses für μ. Ist $\gamma : B \to A$ ein Homomorphismus mit $\alpha\gamma = 1_B$, so heisst γ *rechts Inverses* zu α. Die Abbildung σ in (i) ist also ein rechts Inverses für ε.

1.6 Die Gruppe der Homomorphismen

Es seien A, B Λ-Moduln. Die Menge der Λ-Modulhomomorphismen $\varphi : A \to B$ bildet unter der Operation $(\varphi + \psi)a = \varphi a + \psi a$ eine abelsche Gruppe, geschrieben $\mathrm{Hom}_\Lambda(A, B)$. Sie heisst die *Gruppe der Homomorphismen* von A nach B.

Ist $\beta : B \to B'$ in $\mathrm{Hom}_\Lambda(B, B')$, so erhalten wir einen induzierten Homomorphismus

$$\beta_* := \mathrm{Hom}_\Lambda(A, \beta) : \ \mathrm{Hom}_\Lambda(A, B) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(A, B')$$

durch

$$\beta_*(\varphi) := \beta \circ \varphi$$

Und analog, für einen Λ-Modulhomomorphismus $\alpha : A \to A'$, erhalten wir

$$\alpha^* := \mathrm{Hom}_\Lambda(\alpha, B) : \ \mathrm{Hom}_\Lambda(A', B) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(A, B)$$

durch

$$\alpha^*(\varphi) := \varphi \circ \alpha$$

Dabei sind α^* und β_* Homomorphismen von abelschen Gruppen. Ausserdem gilt

$$(\alpha + \alpha')^* = \alpha^* + \alpha'^*, \quad (\beta + \beta')_* = \beta_* + \beta'_*$$

Ist A ein fest gewählter Λ-Modul, so kann man, wie wir oben gesehen haben, durch den hom-Funktor, $B \mapsto \mathrm{Hom}_\Lambda(A, B)$, dem Λ-Modul B eine abelsche Gruppe zuordnen. Analog ordnet man durch $\beta \mapsto \mathrm{Hom}_\Lambda(A, \beta)$ dem Λ-Modulhomomorphismus β einen Homomorphismus von abelschen Gruppen zu. Es gilt dabei

$$\begin{array}{rl} (i) & (\beta' \circ \beta)_* = (\beta')_* \circ (\beta)_* \\ (ii) & (1_B)_* = 1_{\mathrm{Hom}_\Lambda(A,B)} \end{array}$$

M.a.W. ist der hom-Funktor kovariant, von der *Kategorie der* Λ*-Moduln* in die *Kategorie der abelschen Gruppen.*

Natürlich kann man auch B festhalten und A variieren, i.e. die Zuordnung $A \mapsto \mathrm{Hom}_\Lambda(A, B)$ betrachten, zusammen mit $\alpha \mapsto \mathrm{Hom}_\Lambda(\alpha, B)$ (α ein Λ-Modulhomomorphismus). Diese Zuordnung ist dann ein kontravarianter Funktor von der Kategorie der Λ-Moduln in die Kategorie der abelschen Gruppen.

Bemerkung. Der Unterschied zwischen dem hom-Funktor $\mathrm{Hom}_\Lambda(A, -)$ und dem Funktor $\mathrm{Hom}_\Lambda(-, B)$ besteht in der Reihenfolge der Zusammensetzung der Abbildungen, i.e. die Regel (i) muss angepasst werden.

1.7 Zurück zu Kategorien und Funktoren

Die Λ-Moduln haben wichtige Eigenschaften, die man auch allgemeiner von Kategorien haben möchte (z.B. kann man aus kurzen exakten Sequenzen eine lange exakte Homologiesequenz erhalten und damit Informationen über den Ring, die Moduln erhalten).

Wir benötigen dazu noch weitere Begriffe. Unter den Kategorien sind die abelschen Kategorien diejenigen, die man für die homologische Algebra benötigt. Insbesondere besitzen sie kurze exakte Sequenzen und diese spielen eine sehr wichtige Rolle. Später werden wir auch triangulierte Kategorien behandeln - dort gibt es keine kurzen exakten Folgen. Anstelle von diesen betrachtet man die sogenannten ausgezeichneten Dreiecke.

Wie im Beispiel der Λ-Moduln über einem Ring Λ werden immer wieder die Begriffe Kern und Cokern benötigen in der Sprache der Kategorien. Das heisst, wir wollen, dass diese Begriffe auch auf der Ebene der Kategorien Sinn machen. Auch sollen Monomorphismen (injektive Morphismen) die Kerne ihrer Cokerne sein und Epimorphismen die Cokerne ihrer Kerne.

Definition. Eine *abelsche Kategorie* ist eine Kategorie $\mathcal{C}$ mit den folgenden zuätzlichen Strukturen:

(i) Für jedes Paar von Objekten A, B besitzt $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ die Struktur einer abelschen Gruppe.

(ii) Es existiert ein *Null-Objekt* 0 mit der Eigenschaft, dass $\mathrm{Hom}(A, 0)$ und $\mathrm{Hom}(0, A)$ die triviale Gruppe sind für jedes $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$.

(iii) Die Verknüpfung $\circ$ von Morphismen ist eine bilineare Abbildung

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C)$$

(iv) Endliche direkte Summen existieren (mit üblicher universeller Definition).

(v) Jeder Morphismus $\varphi : A \to B$ hat einen *Kern*, i.e. eine Abbildung $\sigma : K \to A$, so dass $\varphi \circ \sigma = 0$ und für jede Abbildung $\sigma' : K' \to A$ mit $\varphi \circ \sigma' = 0$ existiert genau eine Abbildung $\lambda : K' \to K$ mit $\sigma' = \sigma \circ \lambda$.
(Man nennt K (und σ) dann den Kern von φ.) (Siehe linkes Bild)

$$\begin{tikzcd}
K' \arrow[d, dashed, "\exists!\lambda"'] \arrow[dr, "\sigma'"'] \arrow[drr, "0"] & & \\
K \arrow[r, "\sigma"] \arrow[rr, bend right, "\varphi\sigma=0"'] & A \arrow[r, "\varphi"] & B
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[rr, bend left, "u\varphi=0"] \arrow[drr, "0"'] & B \arrow[r, "u"] \arrow[dr, "u'"] & E \arrow[d, dashed, "\exists!h"] \\
& & E'
\end{tikzcd}$$

(vi) Jeder Morphismus $\varphi : A \to B$ hat einen *Cokern*, i.e. es existiert ein Morphismus und ein Objekt $u : B \to E$ mit $u \circ \varphi = 0$ und so dass für jede weitere Abbildung, Objekt $u' : B \to E'$ mit $u' \circ \varphi = 0$ genau eine Abbildung $h : E \to E'$ existiert, so dass $u' = hu$.
(Man nennt E (und u) dann den Cokern von φ.) (Siehe oben, rechtes Bild)

(vii) Jeder *Monomorphismus* (Morphismus mit Kern = 0) ist der Kern von seinem Cokern.

(viii) Jeder *Epimorphismus* (Morphismus mit Cokern = 0) ist der Cokern von seinem Kern.

(ix) Jeder Morphismus ist die Verknüpfung eines Monomorphismus mit einem Epimorphismus.

Etwas ausführlicher zu (iv): eine *direkte Summe* (oder ein *Biprodukt*) von zwei Objekten A, B einer Kategorie $\mathcal{C}$ ist ein Diagramm

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, shift right, "i_1"'] & C \arrow[l, shift right, "p_A"'] \arrow[r, shift left, "p_B"] & B \arrow[l, shift left, "i_2"]
\end{tikzcd}$$

so dass $p_A i_1 = 1_A$, $p_B i_2 = 1_B$ und $i_1 p_A + i_2 p_B = 1_C$ ist. Geschrieben wird C als $A \oplus B$. Wie eine endliche direkte Summe (Biprodukt) aussieht, soll man sich nun selber überlegen.

Man kann dazu auch den Begriff *Produkt* anschauen. Sind A, B zwei Objekte, so ist das Produkt von A und B ein Tripel (X, p_A, p_B) mit $p_A : X \to A$, $p_B : X \to B$ und mit der Eigenschaft, dass für alle Objekte T mit Abbildungen $t_1 : T \to A$ und $t_2 : T \to B$ genau eine Abbildung $t : T \to X$ existiert, so dass t_1 und t_2 durch X faktorisieren. In einem Diagramm sieht das so aus

$$\begin{tikzcd}
 & A \\
T \arrow[ur, "t_1"] \arrow[r, dotted, "\exists!\ t"'] \arrow[dr, "t_2"'] & X \arrow[u, "p_A"'] \arrow[d, "p_B"] \\
 & B
\end{tikzcd}$$

wobei $t_1 = p_A \circ t$ und $t_2 = p_B \circ t$. Man schreibt X als $A \times B$.

Analog gibt es ein Coprodukt-Diagramm (grob gesagt, mit umgekehrten Pfeilen). Es gilt für eine abelsche Kategorie $\mathcal{A}$, dass A, $B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ ein Produkt in $\mathcal{A}$ haben $\iff$ A und B haben ein Biprodukt in $\mathcal{A}$.

Und etwas genauer zu (vii):
$i : A \to B$ ein Morphismus, so betrachtet man den Cokern von i, das ist ein Paar $\mathrm{cok}(i), c$,

mit $c : B \to \mathrm{cok}(i)$. Zu dem Morphismus c können wir natürlich auch den Kern bilden, d.h. einen Pfeil $j : \ker(c) \to B$.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "i"] \arrow[d, equal, "!"] & B \arrow[r, "c"] & \mathrm{cok}(i) \\
\ker(c) \arrow[ur, "j"'] & &
\end{tikzcd}$$

Der Punkt (vii) verlangt nun folgendes: ist i ein Monomorphismus, so muss $\ker(c)$ (zusammen mit der Abbildung j) und A (zusammen mit der Abbildung i) identifiziert werden können. Man überlege sich analog, wie (viii) aussieht!

Beispiel für eine abelsche Kategorie sind die Kategorien **Λ-Mod**, **Mod-Λ** und die Unterkategorien der endlich erzeugten (links- oder rechts-)Λ-Moduln.

[Vorlesung 3, 22.3.]

Definition.

1. Ein Funktor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ zwischen abelschen Kategorien heisst *additiv*, falls er einen Homomorphismus von abelschen Gruppen
$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(A), F(B))$$
induziert für alle $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$.

2. Ein additiver Funktor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ heisst *links exakt* (bzw. *rechts exakt*), falls für jede s.e.s. $0 \to A \to B \to C \to 0$ in $\mathcal{C}$ die Folge $0 \to F(A) \to F(B) \to F(C)$ (bzw. die Folge $F(A) \to F(B) \to F(C) \to 0$) exakt ist in $\mathcal{D}$. F heisst *exakt*, falls F rechts- und links-exakt ist.

3. Analog dazu heisst ein kontravarianter Funktor G *links exakt* (bzw. *rechts-exakt, exakt*), falls der entsprechende kovariante Funktor $G' : \mathcal{C}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{D}$ diese Eigenschaft hat.

Am besten ist es, sich die Eigenschaften von abelschen Kategorien am Beispiel der Kategorie **Λ-Mod** zu illustrieren. Es gibt ein Resultat von P. Freyd (1984), das sagt, dass jede "kleine" abelsche Kategorie $\mathcal{A}$ mittels einer *vollen exakten Einbettung* $F : \mathcal{A} \to$ **Λ-Mod** in die Kategorie der Λ-Moduln eingebettet werden kann (für einen Ring Λ). Hier heisst "klein", dass die Klasse der Objekte von $\mathcal{A}$ eine Menge bildet. "Voll" bedeutet, dass jede Abbildung in $\mathrm{Hom}_{\mathbf{\Lambda\text{-}Mod}}(A, B)$ Bild einer Abbildung in $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, B)$ ist.

Beispiel eines additiven Funktors: $\mathrm{Hom}_\Lambda(M, -)$ von **Λ-Mod** nach **Ab** (wobei M ein Λ-Modul ist). Der Funktor ist auch links exakt:

Satz 1.2. *Es sei* $0 \to B' \overset{\mu}{\to} B \overset{\nu}{\to} B'' \to 0$ *eine kurze exakte Folge von Λ-Moduln und A ein weiterer Λ-Modul. Dann ist die induzierte Folge*

$$0 \to \mathrm{Hom}_\Lambda(A, B') \overset{\mu_*}{\to} \mathrm{Hom}_\Lambda(A, B) \overset{\nu_*}{\to} \mathrm{Hom}_\Lambda(A, B'')$$

exakt.

Mit andern Worten ist der Funktor $\mathrm{Hom}_\Lambda(M, -)$ links exakt. Die duale Aussage dazu ist

Satz 1.3. *Es sei* $0 \to A' \xrightarrow{\mu} A \xrightarrow{\nu} A'' \to 0$ *eine kurze exakte Folge von* Λ*-Moduln und* B *ein weiterer* Λ*-Modul. Dann ist die induzierte Folge*

$$0 \to \mathrm{Hom}_\Lambda(A'', B) \xrightarrow{\nu^*} \mathrm{Hom}_\Lambda(A, B) \xrightarrow{\mu^*} \mathrm{Hom}_\Lambda(A', B)$$

exakt.

D.h. der kontravariante Funktor $\mathrm{Hom}_\Lambda(-, M)$ ist links exakt.

Beweis Sätze 1.2, 1.3. Übungsaufgabe. ☐

Bemerkung. Die beiden exakten Folgen in den obigen Sätzen können im allgemeinen nicht durch $\to 0$ ergänzt werden. Zum Beispiel ist für $\Lambda = \mathbb{Z}$, $A = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ und exakter Folge $0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{n} \mathbb{Z} \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to 0$, die Abbildung π_* in der induzierten Folge

$$0 \to \mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \xrightarrow{n_*} \mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\pi_*} \mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$$

nicht surjektiv. Warum?

1.8 Freie Moduln, projektive Moduln

Definition. Ein Λ-Modul F heisst *frei*, falls es eine Menge S gibt, so dass jedes Element von F eine eindeutige endliche Linearkombination von Elementen aus S ist, i.e.

$$\sum_{s \in S} \lambda_s s, \ \ \lambda_s \in \Lambda, \ \text{nur endlich viele } \lambda_s \neq 0.$$

Also ist $F = F(S)$ und man sagt auch $F = F(S)$ ist der *freie* Λ*-Modul* auf der Menge S.

Beispiele. (a) $\Lambda = k$ ein Körper. Dann ist jeder k-Modul frei (denn jeder k-Modul ist ein k-Vektorraum).

(b) Für $\Lambda = \mathbb{Z}$ gibt es Λ-Moduln, die nicht frei sind: freie $\mathbb{Z}$-Moduln sind freie abelsche Gruppen. Und endliche Gruppen (die nicht nur aus der 1 bestehen) sind keine freien abelschen Gruppen: das Neutralelement lässt sich nicht eindeutig darstellen, zB in $\mathbb{Z}_5$ ist $0 = 1s + 4s = 2s + 3s$ für jedes $s \in \mathbb{Z}_5$. Damit kann keine Menge S existieren, mit der die Elemente von $\mathbb{Z}_5$ eindeutig geschrieben werden können.

Satz 1.4. *Es sei* $F = F(S)$ *der freie* Λ*-Modul auf der Menge* S*, sei* A *ein beliebiger* Λ*-Modul und* $\{a_s\}$*,* $s \in S$*, eine Familie von Elementen von* A*. Dann existiert ein eindeutig bestimmter* Λ*-Modulhomomorphismus* $\varphi : F(S) \to A$ *mit* $\varphi(s) = a_s \ \forall \ s \in S$*.*

Beweis. Man definiere $\varphi : F \to A$ durch

$$\varphi(\sum_{s \in S} \lambda_s s) = \sum_{s \in S} \lambda_s a_s \, .$$

Es ist klar, dass φ ein Λ-Modulhomomorphismus ist, und dass es der einzige ist mit der Eigenschaft $\varphi(s) = a_s$ für alle $s \in S$. $\square$

Satz 1.5. *Sei F ein freier Λ-Modul und $0 \to B' \overset{\mu}{\to} B \overset{\nu}{\to} B'' \to 0$ eine kurze exakte Sequenz von Λ-Moduln. Dann ist die Folge*

$$0 \to \mathrm{Hom}_\Lambda(F, B') \overset{\mu_*}{\to} \mathrm{Hom}_\Lambda(F, B) \overset{\nu_*}{\to} \mathrm{Hom}_\Lambda(F, B'') \to 0$$

exakt.

Beweis. Es ist zu zeigen, dass ν_* surjektiv ist (der Rest ist Satz 1.2). D.h. zu $\psi : F \to B''$ ist ein Λ-Modulhomomorphismus $\varphi : F \to B$ zu konstruieren mit $\nu_*(\varphi) = \nu \circ \varphi = \psi$. Dazu betrachtet man $\psi(s) \in B''$ (wobei $F = F(S)$ und $s \in S$) und wähle ein $b_s \in B$ mit $\nu(b_s) = \psi(s)$ (ν ist surjektiv). Definiere die Abbildung φ durch $\varphi(s) = b_s$ (für alle $s \in S$). Dann ist $\nu(\varphi(s)) = \nu(b_s) = \psi(s)$ und wegen der Eindeutigkeit (Satz 1.4) ist $\nu \circ \varphi = \psi$. $\square$

Definition. Ein Λ-Modul P heisst *projektiv*, wenn für alle kurzen exakten Folgen

$$0 \to B' \overset{\mu}{\to} B \overset{\nu}{\to} B'' \to 0$$

von Λ-Moduln die induzierte Folge

$$0 \to \mathrm{Hom}_\Lambda(P, B') \overset{\mu_*}{\to} \mathrm{Hom}(P, B) \overset{\nu_*}{\to} \mathrm{Hom}_\Lambda(P, B'') \to 0$$

exakt ist.

In funktorieller Sprache: P ist projektiv, genau dann wenn der Funktor $\mathrm{Hom}_\Lambda(P, -)$ exakt ist.

Korollar 1.6. *Ein freier Modul ist projektiv.*

Satz 1.7. *Sei P ein Λ-Modul.*
P ist projektiv $\Longleftrightarrow$ für jeden surjektiven Λ-Modulhomomorphismus $\varepsilon : B \to B'$ und jeden Λ-Modulhomomorphismus $\psi : P \to B'$ existiert ein Λ-Modulhomomorphismus $\varphi : P \to B$ mit $\varepsilon \circ \varphi = \psi$.

D.h. es existiert eine Abbildung $\varphi : P \to B$, so dass das folgende Diagramm kommutiert.

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "\varepsilon"] & B' \\
P \arrow[u, dotted, "\varphi"] \arrow[ur, "\psi"'] &
\end{tikzcd}$$

Man sagt, dass φ eine *Hochhebung* (ein *Lift*) von ψ ist.

Korollar 1.8. *Ist P projektiv, so ist P isomorph zu einem direkten Summanden in jedem Modul A, dessen Quotient P ist.*

Beweis. Wähle $\psi = 1_P : P \to P$, $\varepsilon : A \to P$ surjektiv. Da P projektiv ist, existiert $\varphi : P \to A$ mit $\varepsilon \circ \varphi = 1_P$. Dann folgt $A = \ker \varepsilon \oplus \operatorname{im} \varphi$, und da φ injektiv ist, ist $P \cong \operatorname{im} \varphi$.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\varepsilon"] & P \\
P \arrow[u, dotted, "\varphi"] \arrow[ur, "1_P"']
\end{tikzcd}$$

□

Korollar 1.9. *Ein projektiver Modul P ist isomorph zu einem direkten Summanden in einem freien Modul.*

Beweis. Wähle $\varepsilon : F \to P$ surjektiv, wobei F ein freier Modul ist. □

Die Umkehrung der Aussage des Korollars 1.9 gilt ebenfalls: ist P ein direkter Summand in einem freien Modul, so ist P projektiv. Dies folgt direkt aus der Tatsache, dass Hom *additiv* ist, i.e. dass die Bildung von $\operatorname{Hom}_\Lambda(A, B)$ in beiden Variablen mit direkten Summen verträglich ist. Es gilt also $\operatorname{Hom}_\Lambda(A_1 \oplus A_2, B) = \operatorname{Hom}_\Lambda(A_1, B) \oplus \operatorname{Hom}_\Lambda(A_2, B)$ und analog $\operatorname{Hom}_\Lambda(A, B_1 \oplus B_2) = \operatorname{Hom}_\Lambda(A, B_1) \oplus \operatorname{Hom}_\Lambda(A, B_2)$.

Beispiel. Sei $R = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$. Dann ist $R = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Der Modul $P := \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ist ein projektiver R-Modul, er ist jedoch nicht frei (er ist zu klein: $(0, 1)P = 0$).

Bemerkung. Es sei $0 \to B' \overset{\mu}{\to} B \overset{\nu}{\to} B'' \to 0$ eine s.e.s. mit der Eigenschaft, dass für alle Moduln A die induzierte Sequenz

$$0 \to \operatorname{Hom}_\Lambda(A, B') \overset{\mu_*}{\to} \operatorname{Hom}_\Lambda(A, B) \overset{\nu_*}{\to} \operatorname{Hom}_\Lambda(A, B'') \to 0$$

exakt ist. Dann zerfällt die Folge $0 \to B' \overset{\mu}{\to} B \overset{\nu}{\to} B'' \to 0$.

Beweis. Übungsaufgabe. □

Dual zum Begriff projektiv ist folgender Begriff:

Definition. Ein Λ-Modul I heisst *injektiv*, wenn für alle kurze exakten Sequenzen

$$0 \to A' \overset{\mu}{\to} A \overset{\nu}{\to} A'' \to 0$$

von Λ-Moduln die induzierte Sequenz

$$0 \to \operatorname{Hom}_\Lambda(A'', I) \overset{\nu^*}{\to} \operatorname{Hom}_\Lambda(A, I) \overset{\mu^*}{\to} \operatorname{Hom}_\Lambda(A', I) \to 0$$

exakt ist.

Äquivalent dazu kann man definieren: der Λ-Modul I ist injektiv, falls für jede exakte Folge

$$0 \to A \overset{\iota}{\to} B$$

und für jedes $f : A \to I$ ein $g : B \to I$ existiert, so dass $g\iota = f$. Die obige Definition wird dann zum Satz: I ist injektiv $\Longleftrightarrow$ der Funktor $\operatorname{Hom}(-, I)$ ist exakt.

Man kann analog zu den Aussagen über projektive Moduln Aussagen über injektive Moduln beweisen, dual dazu. Da wir diese später nicht benötigen, lassen wir das hier.

Bemerkung. Eigenschaften von projektiven, injektiven Moduln:

- Jeder Modul ist das homomorphe Bild eines projektiven Moduls (jeder Modul ist das homomorphe Bild eines freien Moduls, freie Moduln sind projektiv).
- P ist projektiv $\Longleftrightarrow$ jede kurze exakte Folge $0 \to A \to B \to P \to 0$ zerfällt.
- I ist injektiv $\Longleftrightarrow$ jede kurze exakte Folge $0 \to I \to B \to C \to 0$ zerfällt.

1.9 Die ker-coker Folge: Schlangenlemma

Es sei $\varphi : A \to B$ ein Λ-Modulhomomorphismus. Zur Erinnerung: der Cokern von φ ist definiert als $\operatorname{cok}(\varphi) := B/\operatorname{im}\varphi$. Dann ist offenbar die Folge

$$0 \to \ker\varphi \overset{\iota}{\to} A \overset{\varphi}{\to} B \overset{\pi}{\to} \operatorname{cok}\varphi \to 0$$

exakt. Dabei ist ι die Einbettung und π die natürliche Projektion.

Satz 1.10 (Schlangenlemma)**.** *Gegeben sei das kommutative Diagramm*

$$\begin{tikzcd}
 & A' \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[d, "\varphi'"] & A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\varphi"] & A'' \arrow[r] \arrow[d, "\varphi''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & B' \arrow[r, "\beta'"] & B \arrow[r, "\beta"] & B'' &
\end{tikzcd}$$

mit exakten Zeilen. Dann existiert ein Homomorphismus $\sigma : \ker\varphi'' \to \operatorname{cok}\varphi'$, so dass die induzierte Folge

$$\ker\varphi' \overset{\alpha'_*}{\to} \ker\varphi \overset{\alpha_*}{\to} \ker\varphi'' \overset{\sigma}{\to} \operatorname{cok}\varphi' \overset{\beta'_*}{\to} \operatorname{cok}\varphi \overset{\beta_*}{\to} \operatorname{cok}\varphi''$$

exakt ist. Is α' injektiv, so ist auch α'_* injektiv. Ist β surjektiv, so ist auch β_* surjektiv.

(kurz gesagt: $\sigma : a'' \mapsto \beta'^{-1}\varphi\alpha^{-1}(a'') + \operatorname{im}\varphi'$)

Beweis. Wir definieren zuerst den Homomorphismus σ. Es sei $a'' \in \ker \varphi''$. Wähle $a \in A$ mit $\alpha(a) = a''$ (existiert wegen Surjektivität von α). Dann ist $\beta\varphi(a) = \varphi''\alpha(a) = \varphi''(a'') = 0$. Also ist $\varphi(a)$ ein Element aus $\ker \beta = \operatorname{im} \beta'$ (Exaktheit der zweiten Zeile). Damit existiert $b' \in B'$ mit $\beta'(b') = \varphi(a)$. Wir definieren $\sigma(a'') = [b']$, wobei $[\,]$ die entsprechende Restklasse bezeichnet.

Die Unabhängigkeit von der Wahl von a ist nicht schwer einzusehen: Ist $\overline{a} \in A$ ein weiteres Element mit $\alpha(a) = \alpha(\overline{a})$, so gilt $(a - \overline{a}) \in \ker \alpha$, d.h. es existiert $a' \in A'$ mit $\alpha'(a') = a - \overline{a}$. Ist nun $\beta'(\overline{b}') = \varphi(\overline{a})$ und $\beta'(b') = \varphi(a)$, so folgt $\beta'\varphi'(a') = \varphi\alpha'(a') = \varphi(a - \overline{a}) = \varphi(a) - \varphi(\overline{a}) = \beta'(b') - \beta'(\overline{b}') = \beta'(b' - \overline{b}')$. Da β' injektiv ist, folgt $\varphi'(a') = b' - \overline{b}'$, d.h. $[b'] = [\overline{b}']$.

Es ist nun an jeder Stelle die Exaktheit zu prüfen. Wir zeigen dies an der Stelle $\ker \varphi''$ und überlassen den Rest als Übungsaufgabe.

Sei zuerst $a'' \in \ker \varphi''$ und $a'' \in \operatorname{im} \alpha_*$. Die Definition von σ liefert dann sofort $\sigma(a'') = 0$. Also $\operatorname{im} \alpha_* \subset \ker \sigma$.

Beh.: $\ker \sigma \subset \operatorname{im} \alpha_*$: Sei $a'' \in \ker \varphi''$ ein Element von $\ker \sigma$. Wie in der Definition von σ wählen wir $a \in A$ mit $\alpha(a) = a''$ und $b' \in B'$ mit $\varphi(a) = \beta'(b')$.

Wegen $\sigma(a'') = 0$ wird b' auf die Null in $\operatorname{cok} \varphi'$ abgebildet. Da die Folge

$$0 \to \ker \varphi' \to A' \xrightarrow{\varphi'} B' \to \operatorname{cok} \varphi' \to 0$$

exakt ist, existiert also ein $a' \in A$ mit $\varphi'(a') = b'$. Es folgt $\varphi\alpha'(a') = \beta'\varphi'(a') = \beta'(b') = \varphi(a)$.

Sei $\overline{a} = a - \alpha'(a')$. Dann folgt $\alpha(\overline{a}) = a''$ und $\varphi(\overline{a}) = \varphi(a) - \varphi\alpha'(a') = \varphi(a) - \varphi(a) = 0$. Wegen der Exaktheit der zweiten Spalte,

$$0 \to \ker \varphi \to A \xrightarrow{\varphi} B \to \operatorname{cok} \varphi \to 0$$

existiert also $\tilde{a}$ in $\ker \varphi$, das auf $\overline{a}$ in A abgebildet wird, und damit kommt a'' von $\ker \varphi$ her. □

Die Abbildung σ aus Satz 1.10 heisst *Verbindungshomomorphismus* (*connecting homomorphism*).

Bemerkung. Das Schlangenlemma gilt allgemein für (kleine) abelsche Kategorien. Den Beweis in der Modulkategorie führt man mittels einer sogenannten Diagrammjagd durch. Um das Resultat für (kleine) abelsche Kategorien zu haben, benutzt man dann den Einbettungssatz von Freyd (-Mitchell). Das Schlangenlemma gilt jedoch z.B. nicht für Gruppen!

Eine direkte Konsequenz der ker-coker-Sequenz aus Satz 1.10 ist das sogenannten 5er-Lemma:

Korollar 1.11 (Fünfer-Lemma)**.** *Gegeben sei das kommutative Diagramm*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[d, "\varphi'"] & A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\varphi"] & A'' \arrow[r] \arrow[d, "\varphi''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & B' \arrow[r, "\beta'"] & B \arrow[r, "\beta"] & B'' \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

mit exakten Zeilen. Sind zwei der Homomorphismen φ', φ, φ'' *Isomorphismen, so ist auch der dritte ein Isomorphismus.*

Für Anwendungen vom Schlangenlemma ist es wichtig, dass die ker-coker-Folge natürlich ist. Das bedeutet: hat man zwei solche Diagramme und eine Abbildung vom einen ins andere, so dass alle vorkommenden Quadrate kommutativ sind, so erhält man eine Abbildung der ker-coker-Folge des ersten Diagramms in die ker-coker-Folge des zweiten Diagramms, unter der alle vorkommenden Quadrate kommutieren.

Kapitel 2

Kettenkomplexe

[Vorlesung 4, 31.3.2014]

2.1 Kettenkomplexe, Homologie

Sei Λ ein Ring mit Einselement, A, B, C, etc. seien Λ-Moduln.

Definition.

1. Ein *Kettenkomplex* C von Λ-Moduln ist eine Familie $\{C_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, von Λ-Moduln zusammen mit einer Familie von Λ-Modulhomomorphismen $\partial_n : C_n \to C_{n-1}$ mit $\partial_{n-1}\partial_n = 0$ für alle n,

   $$\cdots \to C_{n+1} \overset{\partial_{n+1}}{\to} C_n \overset{\partial_n}{\to} C_{n-1} \overset{\partial_{n-1}}{\to} C_{n-2} \to \dots$$

   Die Familie der Homomorphismen $\{\partial_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ heisst *Differential* oder *Rand*.

2. Sind $C = \{C_n, \partial_n\}$ und $D = \{D_n, \partial'_n\}$ zwei Kettenkomplexe von Λ-Moduln, so ist eine *Kettenabbildung* (ein Homomorphismus von Kettenkomplexen) $\Phi : C \to D$ eine Familie von Λ-Modulhomomorphismen $\varphi_n : C_n \to D_n$, so dass $\varphi_{n-1}\partial_n = \partial'_n\varphi_n$ für alle n. D.h. dass alle vorkommenden Quadrate

   $$\begin{tikzcd} C_n \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, "\varphi_n"'] & C_{n-1} \arrow[d, "\varphi_{n-1}"] \\ D_n \arrow[r, "\partial'_n"] & D_{n-1} \end{tikzcd}$$

   kommutieren.

3. Es ist $Z_n = \ker(\partial_n : C_n \to C_{n-1}) \subset C_n$ der Untermodul der (n-)*Zyklen* und $B_n = \operatorname{im}(\partial_{n+1} : C_{n+1} \to C_n) \subset C_n$ der Untermodul der *(n-)Ränder*. Wegen $\partial_n\partial_{n+1} = 0$ ist $B_n \subset Z_n$. Der *n-te Homologiemodul von C* (oder die *n-te Homologiegruppe von C*) ist dann definiert als

   $$H_n = Z_n/B_n.$$

Für die Homologie $\{H_n(C)\}$ nimmt man also an jeder Stelle des Komplexes den Quotienten Zyklen modulo Ränder. Ist z ein Zyklus, so schreibt man für das entsprechende Element in der Homologie oft $[z]$, die *Homologieklasse von z*. Wir werden oft kurz $H_\bullet(C)$ oder $H(C)$ schreiben anstatt $\{H_n(C)\}$.

Beispiel. Diese Begriffe stammen aus der algebraischen Topologie. Als Beispiel betrachten wir das Tetraeder, das aus den Ecken $0, 1, 2, 3$ und den zugehörigen Kanten, Seitenflächen gebildet wird. (Topologisch betrachten wir also ein Modell der 2-Sphäre). In der algebraischen Topologie ordnet man diesem Objekt einen Kettenkomplex C zu: C_0 ist die freie abelsche Gruppe mit Basis x_0, x_1, x_2, x_3, C_1 die freie abelsche Gruppe mit Basis x_0x_1, x_0x_2, x_0x_3, x_1x_2, x_1x_3 und x_2x_3. C_2 sei die freie abelsche Gruppe mit Basis $x_0x_1x_2$, $x_0x_1x_3$, $x_0x_2x_3$ und $x_1x_2x_3$. Ausserdem sei $C_n = 0$ für alle andern n. Das Differential ist gegeben auf den Basiselementen:

$$\begin{array}{ll}
\partial_0(x_i) = 0 & \forall\ i \\
\partial_1(x_ix_j) = x_j - x_i & i < j \\
\partial_2(x_ix_jx_k) = x_jx_k - x_ix_k + x_ix_j & i < j < k
\end{array}$$

Dieses Differential ordnet einem ein- bzw. zwei-dimensionalen Simplex den (orientierten) Rand zu. Es ist $\partial_1\partial_2 = 0$, es gilt nämlich für alle $i < j < k$

$$\partial_1\partial_2(x_ix_jx_k) = \partial_1(x_jx_k - x_ix_k + x_ix_j) = (x_k - x_j) - (x_k - x_i) + (x_j - x_i) = 0.$$

Was sind die Homologiegruppen von C?

Die n-te Homologie $H_n(C)$ eines Kettenkomplexes C ist genau dann Null, wenn gilt $Z_n = \ker \partial_n = \operatorname{im} \partial_{n+1} = B_n$. D.h., wenn die Folge

$$\cdots \to C_{n+1} \overset{\partial_{n+1}}{\to} C_n \overset{\partial_n}{\to} C_{n-1} \to \ldots$$

an der Stelle C_n exakt ist. Die Homologie misst also die Abweichung von der Exaktheit. Ein Kettenkomplex C mit $H_n(C) = 0$ für alle n heisst auch *azyklisch*.

Wir werden später auch *Cokettenkomplexe* betrachten. Diese sind ähnlich wie Kettenkomplexe definiert, der Unterschied besteht darin, dass das Differential ∂_n von C_n nach C_{n+1} geht und nicht nach C_{n-1}. Man spricht dann von *Cozyklen*, *Corändern* und von der *Cohomologie*. Die Notation für Cohomologie ist üblicherweise mit Indizes oben anstatt unten, i.e. die n-te Cohomologie eines Cokettenkomplexes ist geschrieben $H^n(C)$ und die Cohomologie von C wird $H^\bullet(C)$ geschrieben.

Zurück zu den Kettenkomplexen. Sei $\Phi : C \to D$ eine Kettenabbildung. Die Kommutativität des Quadrates

$$\begin{tikzcd}
C_n \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, "\varphi_n"'] & C_{n-1} \arrow[d, "\varphi_{n-1}"] \\
D_n \arrow[r, "\partial'_n"] & D_{n-1}
\end{tikzcd}$$

liefert

$$\varphi_n(Z_n) \subset Z'_n \quad \text{und} \quad \varphi_n(B_n) \subset B'_n.$$

Damit induziert Φ für jedes n eine Abbildung $(\varphi_n)_* : H_n(C) \to H_n(D)$, $[z] \mapsto [\varphi_n(z)]$:

Satz 2.1. *Die Kettenabbildung $\Phi : C \to D$ induziert einen wohlbestimmten Homomorphismus $\Phi_* : H(C) \to H(D)$. Die Zusammensetzung von zwei Kettenabbildungen entspricht der Zusammensetzung der induzierten Abbildungen in der Homologie. Ist Φ die Identität, so ist auch die induzierte Abbildung in der Homologie die Identität.*

In der Sprache von Kategorien und Funktoren heisst das:

Die Homologie $H_n(-)$ ist ein (kovarianter) Funktor von der Kategorie der Kettenkomplexe von Λ-Moduln (und der Kettenabbildungen) in die Kategorie der Λ-Moduln (und der Λ-Modulhomomorphismen).

2.2 Homotopie

Eine *Homotopie* χ von der Kettenabbildung Φ zur Kettenabbildung Ψ ist eine Familie von Homomorphismen $\chi_n : C_n \to D_{n+1}$ mit

$$\psi_n - \varphi_n = \partial'_{n+1}\chi_n + \chi_{n-1}\partial_n$$

für alle n.

$$\begin{tikzcd}
C_{n+1} \arrow[r, "\partial_{n+1}"] \arrow[d, shift right, "\varphi_{n+1}"'] \arrow[d, shift left, "\psi_{n+1}"] & C_n \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[dl, "\chi_n"'] \arrow[d, shift right, "\varphi_n"'] \arrow[d, shift left, "\psi_n"] & C_{n-1} \arrow[dl, "\chi_{n-1}"'] \arrow[d, shift right, "\varphi_{n-1}"'] \arrow[d, shift left, "\psi_{n-1}"] \\
D_{n+1} \arrow[r, "\partial'_{n+1}"] & D_n \arrow[r, "\partial'_n"] & D_{n-1}
\end{tikzcd}$$

Die Kettenabbildungen Φ und Ψ heissen *homotop*, $\Phi \cong \Psi$, falls es eine Homotopie von Φ nach Ψ gibt. Dies definiert in der Menge der Kettenabbildungen von C nach D eine Äquivalenzrelation. Man hat:

Satz 2.2. *Seien Φ, $\Psi : C \to D$ zwei Kettenabbildungen mit $\Phi \cong \Psi$. Dann folgt $\Phi_* = \Psi_* : H(C) \to H(D)$.*

Beweis. Sei n beliebig, aber fest. Wir schreiben daher den Index n nicht hin. Sei $z \in Z(C)$ mit zugehöriger Homotopieklasse $[z]$. Dann gilt $\varphi_*[z] = [\varphi(z)]$. Damit folgt $(\varphi_* - \psi_*)[z] = [(\varphi - \psi)(z)]$. Aber wegen $\varphi - \psi = \partial'\chi + \chi\partial$ und da z ein Zykel ist, ergibt sich $(\varphi - \psi)(z) = \partial'\chi(z)$. Es ist also $(\varphi - \psi)(z)$ ein Rand (konkret: liegt im Bild von ∂'_{n+1}) und damit $(\varphi_* - \psi_*)[z] = 0$, was zu beweisen war. □

Ist die Kettenabbildung Φ zur Nullabbildung homotop, so heisst Φ *nullhomotop*. Die induzierte Abbildung Φ_* in der Homologie ist dann offensichtlich die Nullabbildung.

Ist die Identität des Kettenkomplexes C kraft der Homotopie χ nullhomotop, so heisst χ auch eine *zusammenziehende Homotopie*. In diesem Fall ist die Homologie des Kettenkomplexes trivial, $H(C) = 0$.

Die Homotopien sind mit der Zusammensetzung von Kettenabbildungen verträglich: sind $\Phi \cong \Psi : C \to D$ und $\Phi' \cong \Psi' : D \to E$, so ist auch $(\Phi'\Phi) \cong \Psi'\Psi$.
(Übungsaufgabe).

Dank dieser Eigenschaft kann man von der Kategorie der Kettenkomplexe mit Kettenabbildungen zur Kategorie der Kettenkomplexe mit *Homotopieklassen* von Kettenabbildungen übergehen.
Diese Kategorie heisst oft die *Homotopiekategorie* der Kettenkomplexe. Nach Satz 2.2 faktorisiert der Funktor der Homologie über die Homotopiekategorie - dies ist ein grundlegendes Resultat in der algebraischen Topologie.

Zwei Kettenkomplexe C und D heissen *homotopieäquivalent*, wenn es Kettenabbildungen $\Phi : C \to D$ und $\Psi : D \to C$ gibt, so dass die Zusammensetzung $\Psi\Phi$ homotop ist zur Identität von C und die Zusammensetzung $\Phi\Psi$ homotop ist zur Identität von D. In der Homotopiekategorie der Kettenkomplexe übernimmt der Begriff der Homotopieäquivalenz die Rolle des (gewöhnlichen) Isomorphiebegriffes. Die Klasse der zum Kettenkomplex C homotopieäquivalenten Kettenkomplexe heisst die *Homotopieklasse von C*. Aus der Funktoreigenschaft der Homologie und dem Satz 2.2 folgt, dass die Homologie eines Kettenkomplexes nur von seiner Homotopieklasse abhängig ist.

Zum Schluss noch ein Beispiel, das zeigt, dass zwei verschiedene Kettenabbildungen die gleiche Abbildung in der Homologie induzieren können, obwohl sie nicht homotop sind:

Beispiel. Seien C und D die folgenden Kettenkomplexe von abelschen Gruppen:
$C_1 = \mathbb{Z} = (a)$ und $C_0 = \mathbb{Z} = (b)$, $C_n = 0$ für $n \neq 0, 1$. Das Differential $\partial_1 : C_1 \to C_0$ sei gegeben durch $\partial_1(a) = 2b$.
Der Kettenkomplex D ist definiert durch $D_1 = \mathbb{Z} = (a')$ und $D_n = 0$ für $n \neq 1$.

$$\begin{array}{lcccccc}
 & & & n=1 & & n=0 & \\
\hline
C: & \cdots & \to 0 \to & \mathbb{Z}=(a) & \overset{a\mapsto 2b}{\longrightarrow} & \mathbb{Z}=(b) & \to 0 \to \cdots \\
D: & \cdots & \to 0 \to & \mathbb{Z}=(a') & \overset{a'\mapsto 0}{\longrightarrow} & 0 & \to 0 \to \cdots \\
\hline
\end{array}$$

Es folgt $H_0(C) = \mathbb{Z}_2$ und $H_n(C) = 0$ für $n \neq 0$. Und $H_1(D) = \mathbb{Z}$, $H_n(D) = 0$ für $n \neq 1$.

Ist $\Phi : C \to D$ die Kettenabbildung, die gegeben wird durch $\varphi_1(a) = a'$ und Ψ die Nullabbildung, so ist die induzierte Abbildung in der Homologie in beiden Fällen die Nullabbildung, $\Phi_* = \Psi_* = 0$.

Aber Φ und Ψ sind nicht homotop. In einer Homotopie χ müsste nämlich für $\chi_0 : C_0 \to D_1$ (was die einzige nicht-triviale Abbildung ist) die Gleichung $\varphi_1 = \varphi_1 - \psi_1 = \partial'_2\chi_1 + \chi_0\partial_1 = \chi_0\partial_1$ erfüllt sein. Ist nun $\chi_0(b) = ma'$, so würde folgen $a' = \varphi_1(a) = \chi_0\partial_1(a) = \chi_0(2b) = 2ma'$, was für kein ganzzahliges m möglich ist.

2.3 Lange exakte Homologiesequenz

Hier wird gezeigt, dass zu einer kurzen exakten Sequenz von Kettenkomplexen eine lange exakte Homologiesequenz gehört.

Satz 2.3. *Es sei* $0 \to C' \overset{\mu}{\to} C \overset{\nu}{\to} C'' \to 0$ *eine kurze exakte Folge von Kettenkomplexen (d.h.* $0 \to C'_n \overset{\mu_n}{\to} C_n \overset{\nu_n}{\to} C''_n \to 0$ *ist kurz exakt für alle* n*). Dann existieren verbindende Homomorphismen* $\omega_n : H_n(C'') \to H_{n-1}(C')$ *für jedes* $n \in \mathbb{Z}$*, so dass die Sequenz*

$$\cdots H_{n+1}(C'') \overset{\omega_{n+1}}{\to} H_n(C') \overset{(\mu_n)_*}{\to} H_n(C) \overset{(\nu_n)_*}{\to} H_n(C'') \overset{\omega_n}{\to} H_{n-1}(C') \overset{(\mu_{n-1})_*}{\to} H_{n-1}(C) \to \cdots$$

exakt ist.

Beweis. Wir betrachten das folgende Diagramm mit exakten Zeilen und Spalten:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & Z'_n \arrow[r] \arrow[d] & Z_n \arrow[r] \arrow[d] & Z''_n \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & C'_n \arrow[r, "\mu_n"] \arrow[d, "\partial'_n"] & C_n \arrow[r, "\nu_n"] \arrow[d, "\partial_n"] & C''_n \arrow[r] \arrow[d, "\partial''_n"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C'_{n-1} \arrow[r, "\mu_{n-1}"] \arrow[d] & C_{n-1} \arrow[r, "\nu_{n-1}"] \arrow[d] & C''_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & C'_{n-1}/B'_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & C_{n-1}/B_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & C''_{n-1}/B''_{n-1} \arrow[d] & \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Mit Hilfe der ker-coker Folge aus Satz 1.10 folgt, dass für alle n die Folgen

$$0 \to Z'_n \to Z_n \to Z''_n$$

und

$$C'_n/B'_n \to C_n/B_n \to C''_n/B''_n \to 0$$

exakt sind. Wobei man sich kurz überlegen soll, warum $Z'_n \to Z_n$ injektiv ist und warum $C_n/B_n \to C''_n/B''_n$ surjektiv ist.
Das wird benötigt, um exakte Zeilen und Spalten im folgenden Diagramm zu erhalten:

$$\begin{tikzcd}
& 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
& Z'_n/B'_n \arrow[r] \arrow[d] & Z_n/B_n \arrow[r] \arrow[d] & Z''_n/B''_n \arrow[d] & \\
& C'_n/B'_n \arrow[r] \arrow[d] & C_n/B_n \arrow[r] \arrow[d] & C''_n/B''_n \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & Z'_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & Z_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & Z''_{n-1} \arrow[d] & \\
& H'_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & H_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & H''_{n-1} \arrow[d] & \\
& 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Daraus lässt sich die Aussage des Satzes mit Hilfe der ker-coker Folge (Satz 1.10) ablesen. □

Man kann den verbindenden Homomorphismus $\omega_n : H_n(C'') \to H_{n-1}(C')$ explizit angeben: Es sei die Homologieklasse $[z''_n] \in H_n(C'')$ gegeben. Wähle $c_n \in C_n$ mit $\nu_n(c_n) = z''_n$. Betrachte $\partial_n(c_n) \in B_{n-1} \subset Z_{n-1}$. Wegen $\nu_{n-1}\partial_n(c_n) = \partial''_n\nu_n(c_n) = \partial''_n(z''_n) = 0$ existiert $z'_{n-1} \in Z'_{n-1}$ mit $\mu_{n-1}(z'_{n-1}) = \partial_n(c_n)$. Der Homomorphimus ω_n ist dann definiert durch $\omega_n([z''_n]) = [z'_{n-1}]$.

Die lange exakte Homologiesequenz ist *natürlich* im folgenden Sinn: ein Homomorphismus der kurzen exakten Folge $C' \hookrightarrow C \twoheadrightarrow C''$ von Kettenkomplexen in eine zweite s.e.s. $D' \hookrightarrow D \twoheadrightarrow D''$ (so dass alle auftretenden Quadrate kommutativ sind) induziert eine Abbildung von der langen exakten Homologiesequenz zu $C' \hookrightarrow C \twoheadrightarrow C''$ in diejenige zu $D' \hookrightarrow D \twoheadrightarrow D''$ (so dass alle entstehenden Quadrate kommutativ sind).

2.4 Projektive Auflösungen

Sei A ein Λ-Modul. Ein Kettenkomplex

$$P: \ \cdots \to P_n \to P_{n-1} \to \cdots \to P_1 \to P_0 \to 0$$

heisst eine *projektive Auflösung* (*projektive Resolution*) *von* A über Λ, falls die P_i alles projektive Λ-Moduln sind und falls die Homologie von P gegeben ist durch

$$H_i(P) = \begin{cases} A & \text{für } i = 0 \\ 0 & \text{für } i > 0. \end{cases}$$

Ist P eine projektive Auflösung von A, so ist der (augmentierte) Kettenkomplex

$$\cdots \to P_n \to P_{n-1} \to \cdots \to P_1 \to P_0 \to A \to 0$$

exakt.

Wie sieht es mit der Existenz projektiver Auflösungen aus?

Satz 2.4. *Gegeben sei der Λ-Modul A. Dann existieren projektive Auflösungen von A.*

Beweis. In Abschnitt 1.8 haben wir bemerkt, dass jeder Modul homomorphes Bild eines projektiven Moduls ist. Also existiert ein projektiver Modul P_0, der sich auf A abbilden lässt. Sei K_0 der Kern dieser Abbildung. Dann können wir wiederum einen Modul P_1 finden, der sich auf K_0 abbilden lässt mit Kern K_1. Also haben wir eine exakte Folge

$$0 \to K_1 \to P_1 \to P_0 \to A \to 0.$$

Auf diese Weise fährt man schrittweise fort, um eine projektive Auflösung zu konstruieren. □

Satz 2.5 (Comparison Theorem)**.** *Sei P eine projektive Auflösung von A und P' eine projektive Auflösung von A', sei $\varphi : A \to A'$ ein Homomorphismus. Dann existiert eine Kettenabbildung $\Phi : P \to P'$, welche $\varphi : A \to A'$ hochhebt.*

Beweis. Man kann dies mit Induktion zeigen, verwendet wird Satz 1.7.
Da P_0 projektiv ist und die Abbildung $P_0' \to A'$ surjektiv, existiert zu der Abbildung $P_0 \to A \to A'$ (das ψ vom Satz 1.7 ist hier also die Abbildung $P_0 \to A'$) eine Hochhebung $\varphi_0 : P_o \to P_0'$, so dass das Quadrat

$$\begin{tikzcd}
P_0 \arrow[r, two heads] \arrow[d, "\varphi_0"] & A \arrow[d, "\varphi"] \\
P_0' \arrow[r, two heads] & A'
\end{tikzcd}$$

kommutiert.

Seien nun $\varphi_0, \dots, \varphi_n$ konstruiert, $\varphi_n : P_n \to P_n'$. Die Abbildung φ_n induziert eine Abbildung $(\varphi_n)_* : K_n \to K_n'$. ($K_n$, K_n': die Kerne, wie im Beweis von Satz 2.4). Wie oben können wir dann zur surjektiven Abbildung $P_{n+1}' \to K_n'$ und zu $(\varphi_n)_*$ zum projektiven Modul P_{n+1} eine Abbildung $\varphi_{n+1} : P_{n+1} \to P_{n+1}'$ bilden, so dass das Quadrat

$$\begin{tikzcd}
P_{n+1} \arrow[r, two heads] \arrow[d, "\varphi_{n+1}"] & K_n \arrow[d, "(\varphi_n)_*"] \\
P_{n+1}' \arrow[r, two heads] & K_n'
\end{tikzcd}$$

kommutiert. Damit erhält man eine Kettenabbildung wie gewünscht. □

[Vorlesung 5, 7.4.2014]

Satz 2.6. *Seien Φ und Ψ zwei Hochhebungen von $\varphi : A \to A'$. Dann existiert eine Homotopie $\Phi \cong \Psi$.*

Beweis. Sei ∂_n das Differential im Kettenkomplex P und ∂'_n dasjenige in P'. Wir müssen nun Abbildung $\chi_n : P_n \to P'_{n+1}$ konstruieren ($n \geq 0$), so dass $\psi_n - \varphi_n = \partial'_{n+1}\chi_n + \chi_{n-1}\partial_n$ gilt (wobei $\chi_{-1} : A \to P'_0$ die Nullabbildung sei).

$$\begin{tikzcd}
P : & \cdots & P_{n+1} \arrow[r, "\partial_{n+1}"] \arrow[d, shift right, "\varphi_{n+1}"'] \arrow[d, shift left, "\psi_{n+1}"] & P_n \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, shift right, "\varphi_n"'] \arrow[d, shift left, "\psi_n"] \arrow[dl, dotted, "\chi_n"'] & P_{n-1} \arrow[d, shift right, "\varphi_{n-1}"'] \arrow[d, shift left, "\psi_{n-1}"] \arrow[dl, dotted, "\chi_{n-1}"'] & \cdots \\
P' : & \cdots & P'_{n+1} \arrow[r, "\partial'_{n+1}"] & P'_n \arrow[r, "\partial'_n"] & P'_{n-1} & \cdots
\end{tikzcd}$$

Wir benutzen auch Induktion. Sei $n = 0$. Es ist $\psi_0 - \varphi_0$ in K'_0 enthalten. Die durch ∂'_1 induzierte Abbildung $P'_1 \to K'_0$ ist surjektiv. Und P_0 ist projektiv, also gibt es nach Satz 1.7 eine Abbildung $\chi_0 : P_0 \to P'_1$, so dass $\psi_0 - \varphi_0 = \partial'_1\chi_0$ ist.

Für den Induktionsschritt sei nun χ_{n-1} bereits konstruiert. Zur Konstruktion von χ_n benutzen wir das Diagramm.

$$\begin{tikzcd}
P : & \cdots & P_{n+1} \arrow[r, "\partial_{n+1}"] \arrow[d, shift right, "\varphi_{n+1}"'] \arrow[d, shift left, "\psi_{n+1}"] & P_n \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, shift right, "\varphi_n"'] \arrow[d, shift left, "\psi_n"] & P_{n-1} \arrow[d, shift right, "\varphi_{n-1}"'] \arrow[d, shift left, "\psi_{n-1}"] \arrow[dl] & \cdots \\
P' : & \cdots & P'_{n+1} \arrow[r, "\partial'_{n+1}"] & P'_n \arrow[r, "\partial'_n"] & P'_{n-1} & \cdots
\end{tikzcd}$$

Nach Voraussetzung gilt

$$\psi_{n-1} - \varphi_{n-1} = \partial'_n\chi_{n-1} + \chi_{n-2}\partial_{n-1},$$

wir brauchen $\psi_n - \varphi_n = \partial'_{n+1}\chi_n + \chi_{n-1}\partial_n$.

Es gilt

$$\begin{aligned}
\partial'_n(\psi_n - \varphi_n - \chi_{n-1}\partial_n) &= \partial'_n\psi_n - \partial'_n\varphi_n - \partial'_n\chi_{n-1}\partial_n \\
&= \psi_{n-1}\partial_n - \varphi_{n-1}\partial_n - \partial'_n\chi_{n-1}\partial_n \\
&= (\psi_{n-1} - \varphi_{n-1} - \partial'_n\chi_{n-1})\partial_n \\
&= \chi_{n-2}\partial_{n-1}\partial_n \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Damit faktorisiert die Abbildung $\psi_n - \varphi_n - \chi_{n-1}\partial_n$ über $K'_n = \ker \partial'_n$. Da die durch ∂'_{n+1} induzierte Abbildung $P'_{n+1} \to K'_n$ surjektiv ist, kann man wegen der Projektivität von P_n eine Abbildung $\chi_n : P_n \to P'_{n+1}$ finden mit

$$\psi_n - \varphi_n - \chi_{n-1}\partial_n = \partial'_{n+1}\chi_n.$$

Das war zu beweisen. □

Korollar 2.7. *Es seien P und P' zwei projektive Auflösungen von A. Dann sind P und P' homotopieäquivalent.*

Das bedeutet, dass in der Kategorie der Kettenkomplexe und der Homotopieklassen der Kettenabbildungen (als Morphismenmenge der Kategorie) die projektive Auflösung von einem Modul A bis auf (eindeutig bestimmte) Isomorphie eindeutig bestimmt ist.

2.5 Derivierte Funktoren (abgeleitete Funktoren)

Hier geht es um Funktoren von der Kategorie Λ-**Mod** der Λ-Moduln in der Kategorie **Ab** der abelschen Gruppen.

Zur Erinnerung: ein (kovarianter) Funktor F von Λ-**Mod** nach **Ab** assoziiert zu jedem Λ-Modul M eine abelsche Gruppe $F(M)$ und zu jedem Λ-Modulhomomorphismus $\varphi : M \to M'$ einen Homomorphismus $F(\varphi) = \varphi_* : F(M) \to F(M')$, wobei
(i) $F(\varphi \circ \psi) = F(\varphi) \circ F(\psi)$
(ii) $F(1_M) = 1_{F(M)}$
Der Funktor ist additiv, falls für alle A, B Objekte von Λ-**Mod** gilt, dass die Zuordnung $\mathrm{Hom}_\Lambda(A, B) \to \mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(F(A), F(B))$ ein Homomorphismus ist. D.h. falls $F(\varphi + \psi) = F(\varphi) + F(\psi)$ gilt.

Satz 2.8. *Ist* $F : \Lambda$-**Mod** $\to$ **Ab** *ein additiver Funktor, dann gilt*

$$F(A \oplus B) = F(A) \oplus F(B) \quad \textit{und} \quad F(0) = 0.$$

Beweis als Übung. Hinweis: man betrachte $A \oplus B$ mit den Injektionen ι_A, ι_B und den Projektionen π_A, π_B.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[dr, hook, shift left, "\iota_A"] & & B \arrow[dl, hook', shift right, "\iota_B"'] \\
& A \oplus B \arrow[ul, shift left, "\pi_A"] \arrow[ur, shift right, "\pi_B"'] &
\end{tikzcd}$$

Dann gilt $\pi_A \iota_A = 1_A$, $\pi_A \iota_B = 0$, $\pi_B \iota_A = 0$, $\pi_B \iota_B = 1_B$ und $\iota_A \pi_A + \iota_B \pi_B = 1_{A \oplus B}$.

Beispiele. Sei A ein Λ-Modul.

1. Der Funktor $\mathrm{Hom}_\Lambda(A, -)$ (der jedem Λ-Modul B die Gruppe $\mathrm{Hom}_\Lambda(A, B)$ und jedem Homomorphismus $\varphi : B \to B'$ den Homomorphismus $\varphi_* : \mathrm{Hom}_\Lambda(A, B) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(A, B')$ zuordnet) ist ein additiver Funktor Λ-**Mod** $\to$ **Ab**.

2. Der Funktor $\mathrm{Hom}_\Lambda(-, A)$ ist ein kontravarianter additiver Funktor Λ-**Mod** $\to$ **Ab**.

3. Die Zuordnung, die jeden links-Λ-Modul B auf das Tensorprodukt $B \mapsto A \otimes_\Lambda B$ schickt, mit der Zuordnung, die jeden Λ-Modulhomomorphismus $\varphi : B \to B'$ auf den induzierten Homomorphismus $\varphi_* : A \otimes_\Lambda B \to A \otimes_\Lambda B'$ schickt (auf den unzerlegbaren Tensoren durch $\varphi_*(a \otimes b) = a \otimes \varphi(b)$ bestimmt), definiert einen Funktor Λ-**Mod** $\to$ **Ab**. (Dabei ist A ein rechts-Λ-Modul). Die Eigenschaften des Tensorproduktes zeigen, dass dies auch ein (kovarianter) additiver Funktor ist.

Ein Standardverfahren ist, eine Auflösung (projektiv oder injektiv) eines Moduls zu nehmen und einen (additiven) kovarianten Funktor F von Λ-**Mod** nach **Ab** darauf anzuwenden. Wenn man die Homologie des resultierenden Komplexes nimmt, so hat man eine Folge von Funktoren, die die derivierten Funktoren von F heissen.

Derivierte Funktoren werden also mittels projektiven (injektiven) Auflösungen konstruiert. Auflösungen sind nicht eindeutig. Daher müssen wir zeigen, dass dies unabhängig von der jeweiligen Wahl der Auflösung ist.

Wenn wir nun einen Kettenkomplex $C = \{C_n, \partial_n\}$ von Λ-Moduln nehmen und darauf einen additiven Funktor F anwenden, so folgt aus der Funktoreigenschaft und weil F den Nullhomomorphismus auf den Nullhomomorphismus abbildet, dass das Bild $F(C) = \{F(C_n), F(\partial_n)\}$ ein Kettenkomplex von abelschen Gruppen ist. Ist $\Phi : C \to D$ eine Kettenabbildung, so ist $F(\Phi) : F(C) \to F(D)$ ebenfalls eine Kettenabbildung. Ist $\chi : C \to D$ eine Homotopie zwischen zwei Kettenabbildungen Φ und $\Psi : C \to D$, so ist $F(\chi)$ wegen der Additivität von F eine Homotopie zwischen den Kettenabbildungen $F(\Phi)$ und $F(\Psi)$. Wenn also insbesondere die Kettenkomplexe C und D homotopieäquivalent sind, so sind es auch die beiden Kettenkomplexe $F(C)$ und $F(D)$.

Nun zum konkreten Fall der projektiven Auflösungen.

1. Sei A ein Λ-Modul und P eine projektive Auflösung von A. Da P bis auf Homotopieäquivalenz eindeutig bestimmt ist, ist für den additiven Funktor F der Kettenkomplex $F(P)$ ebenfalls bis auf Homotopieäquivalenz eindeutig bestimmt. Die Homologie des Kettenomplexes $F(P)$ hängt also nicht von der Wahl der projektiven Auflösung P von A ab, sondern einzig vom Modul A. Damit wird dem Modul A und jedem additiven Funktor F für jedes n eine wohlbestimmte abelsche Gruppe $H_n(F(P)) = \ker(F\partial_n)/\operatorname{im}(F\partial_{n+1})$ zugeordnet (∂_n die Differentiale von P).

2. Ist nun $\varphi : A \to A'$ ein Λ-Modulhomomorphismus, so induziert dies einen Homomorphismus von Homologiegruppen wie folgt: Seien P und P' projektive Resolutionen von A bzw. von A'. Dann lässt sich nach Satz 2.5 φ zu einer Kettenabbildung $\Phi : P \to P'$ hochheben. Ausserdem ist nach Satz 2.6 die Homotopieklasse der Kettenabbildung Φ eindeutig durch $\varphi : A \to A'$ bestimmt, womit auch die Homotopieklasse der Abbildung $F(\Phi) : F(P) \to F(P')$ eindeutig bestimmt ist. Nach Satz 2.2 ist damit auch der induzierte Homomorphismus in der Homologie eindeutig bestimmt.
   Zusammenfassend: zur Abbildung $\varphi : A \to A'$ gehört ein eindeutig bestimmter Homomorphismus $(F\varphi_n)_* : H_n(F(P)) \to H_n(F(P'))$, $n \geq 0$.

Mit dieser Zuordnung (auf Ebene der Λ-Moduln und der Homomorphismen von Λ-Modul) wird $A \rightsquigarrow H_n(F(P))$, $n \geq 0$, zu einem kovarianten Funktor von der Kategorie Λ-**Mod** in die Kategorie **Ab**. Dieser Funktor heisst der n-te links-derivierte Funktor $L_n(F)$ von F.

Definition. Der *n-te links-derivierte Funktor* $L_n(F) : \Lambda\text{-}\mathbf{Mod} \to \mathbf{Ab}$ des additiven Funktors $F : \Lambda\text{-}\mathbf{Mod} \to \mathbf{Ab}$ ist definiert durch

$$(L_nF)(A) = H_n(F(P)),$$

mit

$$(L_nF)(\varphi) = (F\varphi_n)_* : H_n(F(P)) \to H_n(F(P'))$$

wobei P eine beliebige projektive Auflösung von A ist.

Wir können hier die beiden Funktoreigenschaften nachprüfen.

- Die Identität $1_A : A \to A$ induziert die Identität in der Homologie $H_n(F(P)) = (L_nF)(A)$: Wir können die Identität $1_A : A \to A$ durch die Identität der projektiven Auflösung P von A hochheben. Die induzierte Abbildung in der Homologie ist dann ebenfalls die Identität.

- Für die Zusammensetzung von $\varphi : A \to A'$ und $\varphi' : A' \to A''$ gilt

  $$(F(\varphi'_n \circ \varphi_n))_* = (F(\varphi'_n))_* \circ (F\varphi_n))_* : H_n(F(P)) \to H_n(F(P'')) :$$

  Seien P, P', P'' projektive Auflösungen von A, A' bzw. von A''. Die Kettenabbildung $\Phi' \circ \Phi : P \to P''$, die durch Zusammensetzung der Hochhebungen $\Phi : P \to P'$ von φ und $\Phi' : P' \to P''$ von φ' gebildet wird, ist eine Hochhebung der Zusammensetzung $\varphi' \circ \varphi$. Die induzierten Abbildungen in der Homologie der Kettenkomplexe $F(P)$, $F(P')$ und $F(P'')$ haben dann ebenfalls diese Eigenschaft.

Die Funktoren $L_n(F) : \Lambda\text{-}\mathbf{Mod} \to \mathbf{Ab}$, $n \geq 0$, sind additiv: Übung.

Die weiteren Eigenschaften der links-derivierten Funktoren eines additiven Funktors werden wir im nächsten Kapitel direkt am Beispiel des Ext-Funktors besprechen.

Bemerkung. Einiges zur Dualisierung und zur Terminologie:

Anstelle einer projektiven Auflösung (nach links) eines Λ-Moduls A kann man auch eine *injektive Auflösung* (nach rechts) von A betrachten. Analog definiert man dann für einen kovarianten additiven Funktor F die sogenannten *rechts-derivierten Funktoren R^nF von F.*

Ist G ein kontravarianter Funktor (von einer Kategorie $\mathbf{C}$ aus), so betrachtet man den entsprechenden kovarianten additiven Funktor von der entgegengesetzten Kategorie ($\mathbf{C}^{\text{opp}}$) aus. Eine projektive Auflösung eines Objektes A in der ursprünglichen Kategorie ist eine injektive Auflösung von A in der Kategorie $\mathbf{C}^{\text{opp}}$. Entsprechend liefert dann das obige Verfahren für eine projektive Auflösung von A und den kontravarianten Funktor, übersetzt in die entgegengesetzte Kategorie, rechts-derivierten Funktoren von G. (Diese Terminologie wird auch verwendet, ohne die entgegengesetzte Kategorie $\mathbf{C}^{\text{opp}}$ zu erwähnen). Daher heissen die mit Hilfe einer projektiven Resolution definierten derivierten Funktoren des kontravarianten Funktors G die rechts-derivierten Funktoren von G, sie werden mit $R^n(G)$ bezeichnet.

Analog erhält man die *links-derivierten* Funktoren $L_n(G)$ des kontravarianten Funktors G, wenn man für A eine injektive Auflösung (in $\mathbf{C}$) wählt.

2.6 Ext als derivierter Funktor (und Tor)

Wir betrachten hier für einen gegebenen Λ-Modul B den Funktor $G : A \rightsquigarrow Hom_\Lambda(A, B)$. Wir wissen, dass dies ein additiver *kontra*varianter Funktor von Λ-**Mod** in die Kategorie **Ab** der abelschen Gruppen ist. Wie im Abschnitt 2.5 beschrieben liefert eine projektive Auflösung eines Moduls A die rechts-derivierten Funktoren R^nG.

Zur Vollständigkeit hier nochmals die entsprechenden Schritte:

1. Zum gegebenen Λ-Modul A wählt man eine projektive Auflösung P (deren Homotopieklasse ist eindeutig durch A bestimmt, cf. Korollar 2.7).

2. Man wendet den Funktor $G = \mathrm{Hom}_\Lambda(-, B)$ an, bildet also den *Co*kettenkomplex $\mathrm{Hom}_\Lambda(P, B)$. (Da G additiv ist, ist die Homotopieklasse von $\mathrm{Hom}_\Lambda(P, B)$ eindeutig bestimmt (Diskussion im Abschnitt 2.5, vor der Definition der derivierten Funktoren).

3. Bilde zu $\mathrm{Hom}_\Lambda(P, B)$ die *Co*homologie $H^n(\mathrm{Hom}(P, B))$ (die Cohomologiegruppen sind unabängig von der Auswahl der projektiven Auflösung P und eindeutig durch A bestimmt.)

4. Ein Homomorphismus $\varphi : A \to A'$ lässt sich zu einer Kettenabbildung $\Phi : P \to P'$ hochheben (die Homotopieklasse der Kettenabbildung ist nach Satz 2.6 durch $\varphi : A \to A'$ eindeutig bestimmt).

5. Die Anwendung von G liefert eine *Co*kettenabbildung
$\Phi^* : \mathrm{Hom}_\Lambda(P', B) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(P, B)$ (umgekehrte Richtung). (Die Cokettenabbildung Φ^* ist bis auf Homotopie eindeutig durch $\varphi : A \to A'$ bestimmt, cf. Satz 2.2 übersetzt in den Fall der Cohomologie).

6. Die Cokettenabbildung Φ^* induziert einen Homomorphismus
$\varphi_n^* : H^n(\mathrm{Hom}_\Lambda(P', B)) \to H^n(\mathrm{Hom}_\Lambda(P, B))$ (dieser Homomorphismus ist eindeutig durch $\varphi : A \to A'$ bestimmt).

Definition. Es sei der Λ-Modul B gegeben. Für $n = 0, 1, 2, \ldots$ definieren wir den (kontravarianten) Funktor $\mathrm{Ext}^n_\Lambda(-, B) = R^n(\mathrm{Hom}_\Lambda(-, B))$, $A \mapsto \mathrm{Ext}^n_\Lambda(A, B)$, $n \geq 0$, als den n-ten rechts-derivierten Funktor von $\mathrm{Hom}_\Lambda(-, B)$.

In diesem Abschnitt diskutieren wir nun die Eigenschaften der Ext-Funktoren. Analoge Eigenschaften können allgemeiner für derivierte Funktoren gezeigt werden (bis auf Punkt 5, i.e. Satz 2.9). Die Formulierungen der allgemein gültigen Aussagen und deren Beweise kann man sich als Übungsaufgabe überlegen.

1. Die nullte Ext-Gruppe $\mathrm{Ext}^0_\Lambda(A, B)$**:**
Wir betrachten den Beginn einer augmentierten projektiven Auflösung von A, also die exakte Folge

$$\cdots \to P_1 \overset{\partial_1}{\to} P_0 \overset{\pi}{\to} A \to 0$$

Sei $K_0 = \ker \pi = \operatorname{im} \partial_1$. Der Funktor $\operatorname{Hom}_\Lambda(-, B)$ ist links-exakt. Daher liefert seine Anwendung die exakten Folgen

$$0 \to \operatorname{Hom}_\Lambda(A, B) \to \operatorname{Hom}_\Lambda(P_0, B) \to \operatorname{Hom}_\Lambda(K_0, B)$$

und

$$0 \to \operatorname{Hom}_\Lambda(K_0, B) \to \operatorname{Hom}_\Lambda(P_1, B) \to \cdots$$

Sei ∂_1^* die durch ∂_1 induzierte Abbildung, i.e. die Zusammensetzung

$$\operatorname{Hom}_\Lambda(P_0, B) \to \operatorname{Hom}_\Lambda(K_0, B) \to \operatorname{Hom}_\Lambda(P_1, B).$$

Um $\operatorname{Ext}^0_\Lambda(A, B)$ zu berechnen, müssen wir die Cohomologie $H^0(\operatorname{Hom}(P, B))$ bilden. Also

$$\operatorname{Ext}^0_\Lambda(A, B) = \ker \partial_1^* / \operatorname{im} \pi^* = \ker \partial_1^* = \operatorname{Hom}_\Lambda(A, B).$$

2. $\operatorname{Ext}^n_\Lambda(A, B)$ mit projektivem Modul A:
Ist $A = P$ projektiv, so ist $0 \to P_0 \to 0$ mit $P_0 = P$ eine projektive Auflösung von A. Damit folgt $\operatorname{Ext}^n_\Lambda(A, B) = 0$ für $n \geq 1$.

3. Kovarianz, Funktor:
Sei $\beta : B \to B'$ ein Λ-Modulhomomorphismus. Dann induziert β eine wohldefinierte Cokettenabbildung $\beta^* : \operatorname{Hom}_\Lambda(P, B) \to \operatorname{Hom}_\Lambda(P, B')$ (P eine projektive Auflösung von A). Dies induziert für jedes n eine entsprechende Abbildung in der n-ten Cohomologiegruppe. Man kann nachprüfen, dass damit $B \rightsquigarrow \operatorname{Ext}^n_\Lambda(A, B)$, $n \geq 0$, zu einem kovarianten Funktor wird.

[Vorlesung 6, 5.5.2014] (selber lesen, Vorlesung fällt aus)

4. Lange exakte Sequenz für die Cohomologie:
Ist

$$0 \to B' \xrightarrow{\mu} B \xrightarrow{\nu} B'' \to 0$$

eine kurze exakte Folge und P wie oben eine projektive Resolution von A. Dann erhält man eine kurze exakte Folge von Cokettenkomplexen

$$0 \to \operatorname{Hom}_\Lambda(P, B') \xrightarrow{\mu_*} \operatorname{Hom}_\Lambda(P, B) \xrightarrow{\nu_*} \operatorname{Hom}_\Lambda(P, B'') \to 0$$

Damit erhalten wir eine lange exakte Sequenz für die Cohomologie, also für die Ext-Gruppen:

$$\begin{aligned} 0 \to \operatorname{Hom}_\Lambda(A, B') &\xrightarrow{\mu_*} \operatorname{Hom}_\Lambda(A, B) \xrightarrow{\nu_*} \operatorname{Hom}_\Lambda(A, B'') \\ &\xrightarrow{\omega} \operatorname{Ext}^1_\Lambda(A, B') \xrightarrow{\mu_*} \operatorname{Ext}^1_\Lambda(A, B) \xrightarrow{\nu_*} \operatorname{Ext}^1_\Lambda(A, B'') \\ &\xrightarrow{\omega} \operatorname{Ext}^2_\Lambda(A, B') \xrightarrow{\mu_*} \operatorname{Ext}^2_\Lambda(A, B) \xrightarrow{\nu_*} \operatorname{Ext}^2_\Lambda(A, B'') \to \ldots \end{aligned}$$

5. Charakterisierung von projektiven Moduln:

Mit Hilfe der obigen langen exakten Ext-Sequenz lässt sich zeigen:

Satz 2.9. *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(i) *A ist projektiv;*

(ii) $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(A,B)=0$ *für alle Moduln B;*

(iii) $\mathrm{Ext}^n_\Lambda(A,B)=0$ *für alle Moduln B und alle $n \geq 1$.*

Beweis. In der Reihenfolge (i) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (i) muss (nach **2.** oben) nur noch die Implikation (ii) $\Rightarrow$ (i) gezeigt werden. Nach Punkt **4.** ist unter der Voraussetzung (ii) die Folge

$$0 \to \mathrm{Hom}_\Lambda(A,B') \overset{\mu_*}{\to} \mathrm{Hom}_\Lambda(A,B) \overset{\nu_*}{\to} \mathrm{Hom}_\Lambda(A,B'') \to 0$$

exakt für jede s.e.s. $0 \to B' \overset{\mu}{\to} B \overset{\nu}{\to} B'' \to 0$. Das ist gerade die Definition von projektiven Moduln. ☐

6. Lange exakte Sequenz in der ersten Variable

Sei

$$0 \to A' \overset{\mu}{\to} A \overset{\nu}{\to} A'' \to 0$$

eine kurze exakte Folge, seien P' und P'' projektive Auflösungen von A', A'':

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & P'_1 \arrow[r] & P'_0 \arrow[r, "\pi'"] \arrow[d] & A' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & \dots \arrow[r, "\pi"] \arrow[d] & A \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
{} \arrow[r] & P''_1 \arrow[r] & P''_0 \arrow[r, "\pi''"] & A'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Wir werden eine Auflösung P von A konstruieren, so dass wir eine kurze exakte Folge von Kettenkomplexen erhalten. Wegen der Projektivität von P''_n muss $P_0 = P'_0 \oplus P''_0$ gelten.

Um die Abbildung $P_0 \to A$ zu definieren, finden wir zuerst $\varphi : P''_0 \to A$ mit $\nu\varphi = \pi''$, was wegen der Projektivität von P''_0 möglich ist. Dann definieren wir $\pi : P_0 \to A$ durch $\pi(p'_0, p''_0) = \mu\pi'(p_0) + \varphi(p''_0)$. Die entstehenden Quadrate sind kommutativ. Ausserdem zeigt das Schlangenlemma, dass π surjektiv ist und dass die Folge

$$0 \to \ker \pi' \to \ker \pi \to \ker \pi''$$

exakt ist. Damit kann der nächste Schritt in der Konstruktion von P, nämlich die Konstruktion von P_1 zusammen mit den entsprechenden Abbildungen, analog durchgeführt werden.

Daraus erhält man eine kurze exakte Folge von Kettenkomplexen, geschrieben z.B. als $P' \hookrightarrow P \twoheadrightarrow P''$, mit $P = P' \oplus P''$. Es ist jedoch das Differential in P *nicht* die Summe der Differentiale in P' und in P''.

Auf diese s.e.s von Kettenkomplexen wenden wir nun den Funktor $\mathrm{Hom}_\Lambda(-,B)$ an. Wegen der Additivität (von $\mathrm{Hom}_\Lambda(-,B)$) ist das Resultat eine kurze exakte Folge von

Cokettenkomplexen, die eine lange exakte Folge in der Homologie liefert. Da die Homologiegruppen sich identifizieren lassen als Ext-Gruppen, gibt das

$$\begin{aligned} 0 \to \mathrm{Hom}_\Lambda(A'', B) &\xrightarrow{\nu^*} \mathrm{Hom}_\Lambda(A, B) \xrightarrow{\mu^*} \mathrm{Hom}_\Lambda(A', B) \\ &\xrightarrow{\omega} \mathrm{Ext}^1_\Lambda(A'', B) \xrightarrow{\nu^*} \mathrm{Ext}^1_\Lambda(A, B) \xrightarrow{\mu^*} \mathrm{Ext}^1_\Lambda(A', B) \\ &\xrightarrow{\omega} \mathrm{Ext}^2_\Lambda(A'', B) \xrightarrow{\nu^*} \mathrm{Ext}^2_\Lambda(A, B) \xrightarrow{\mu^*} \mathrm{Ext}^2_\Lambda(A', B) \to \ldots \end{aligned}$$

7. Man kann nachprüfen, dass die exakten Ext-Folgen natürlich sind: Sowohl Abbildungen der zugrunde liegenden kurzen exakten Folgen wie auch Abbildungen des festen Moduls führen zu entsprechenden Abbildungen der langen exakten Folgen, so dass alle entstehenden Quadrate kommutieren.

[Vorlesung 7, 12.5.2014]

8. Dimensionsshift:

Sei $0 \to R \xrightarrow{\mu} P \xrightarrow{\nu} A \to 0$ eine *projektive Präsentierung* von A, d.h. eine kurze exakte Folge mit P projektiv. Dann liefert die unter **6.** beschriebene Ext-Folge, zusammen mit **2.**, für $n \geq 2$ den Isomorphismus

$$\mathrm{Ext}^n_\Lambda(A, B) \cong \mathrm{Ext}^{n-1}_\Lambda(R, B)$$

und für $n = 1$ erhält man die kurze exakte Folge

$$0 \to \mathrm{Hom}_\Lambda(A, B) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(P, B) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(R, B) \to \mathrm{Ext}^1_\Lambda(A, B) \to 0.$$

Also ist $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(A, B)$ der Cokern von μ^*, $\mathrm{cok}(\mu^* : \mathrm{Hom}_\Lambda(P, B) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(R, B))$.
Allgemeiner gilt (Übung 2.4.3 in [W]): ist

$$0 \to M_k \xrightarrow{\mu} P_k \to P_{k-1} \to \cdots \xrightarrow{\partial_1} P_0 \to A \to 0$$

exakt mit P_i projektiv, dann ist $\mathrm{Ext}^i_\Lambda(A, B) = \mathrm{Ext}^{i-k-1}_\Lambda(M_k, B)$ für $i \geq k + 2$. Zudem ist $\mathrm{Ext}^{k+1}_\Lambda(A, B)$ der Cokern von $\mu^* :\ \mathrm{Hom}_\Lambda(P_k, B) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(M_k, B)$.

Beweis: Übungsaufgabe.

9. Die derivierten Funktoren Tor^Λ_n:

Ein weiteres Beispiel von derivierten Funktoren sind die Tor^Λ_n. Sie werden mittels des Tensorproduktes definiert. Sei M ein rechts-Λ-Modul. Sei

$$P : \quad \cdots \to P_2 \xrightarrow{\partial_2} P_1 \xrightarrow{\partial_1} P_0 \to A \to 0$$

eine projektive Auflösung von A. Dann erhalten wir einen Kettenkomplex

$$M \otimes P : \quad \cdots \to\ M \otimes_\Lambda P_2 \xrightarrow{1\otimes\partial_2} M \otimes_\Lambda P_1 \xrightarrow{1\otimes\partial_1} M \otimes_\Lambda P_0.$$

Dieser Komplex ist i.a. nicht exakt. Wegen dem Comparison Theorem (Satz 2.5) ist der Komplex unabhängig von der projektiven Auflösung (bis auf Homotopie-Äquivalenz). D.h. die Homologiegruppen sind unabhängig von der Wahl der Auflösung, und man kann definieren:

$$\mathrm{Tor}_n^\Lambda(M,A) := H_n(M \otimes P, 1 \otimes \partial_*)$$

(Die n-te Homologiegruppe vom Komplex $M \otimes P$, mit zugehörigem Differential $1 \otimes \partial_*$). Wir werden die Tor-Gruppen nicht weiter behandeln.

Bemerkung. Der Name Ext kommt von einer Anwendung dieser Funktoren her, die wir im Abschnitt 2.7 betrachten werden. Der Name Tor kommt von einer Anwendung dieser Funktoren in der Theorie der Torsionsmoduln her.

Bemerkung. Beim Vorgehen mittels Hom-Funktor haben wir die Variable A ausgezeichnet und für festes B vom so enstehenden kontravarianten Funktor die rechts-Derivierten als Ext-Funktoren definiert (Definition in diesem Abschnitt). Dual dazu kann man im Hom-Funktor die Variable B auszeichnen und für festes A vom so entstehenden kovarianten Funkor $F : B \rightsquigarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(A,B)$ (mit Hilfe einer injektiven Resolution von B) die rechts-derivierten Funktoren R^nF bilden. Für den Augenblick bezeichnen wir diese mit $\overline{\mathrm{Ext}}_\Lambda(A,B)$ (kurz gesagt: $\overline{\mathrm{Ext}}_\Lambda^n(A,-)$ als n-ter rechts-derivierter Funktor von $\mathrm{Hom}_\Lambda(A,-)$).

Man kann dann die Überlegungen **1.** bis **8.** von oben entsprechend dualisieren. Dies führt zu analogen Resultaten für die $\overline{\mathrm{Ext}}_\Lambda^n$-Funktoren.

Mit diesen Informationen lässt sich dann das Resultat beweisen, dass die $\overline{\mathrm{Ext}}_\Lambda^n$-Funktoren mit den Ext_Λ^n-Funktoren übereinstimmen: sie sind für jedes n natürlich äquivalent. Ferner sind auch die verbindenden Homomorphismen in den langen exakten Sequenzen mit dieser natürlichen Äquivalenz (bis auf Vorzeichen!) verträglich. Die Details kann man in [HS, IV, Kapitel 8] finden.

Wir werden einfach Ext benutzen - der Funktor kann dank diesem Resultat sowohl mit Hilfe einer projektiven Auflösung der ersten Variablen von Hom wie auch mit Hilfe einer injektiven Auflösung der zweiten Variablen von Hom erhalten werden.

Einschub zu Pull-back, Push-out:

In der Übungsserie 3 werden die Konstruktionen Push-out und Pull-back benutzt. Wir haben schon gesehen, dass das kommutative Diagramm ein grundlegendes Konzept in der homologischen Algebra und in der Kategorientheorie ist. Insbesondere zB ein kommutierendes Quadrat

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & \bullet \arrow[d, "\varphi"] \\ \bullet \arrow[r, "\psi"] & \bullet \end{tikzcd}$$

mit $\varphi\alpha = \psi\beta$.

Dazu stellt sich die Frage, ob es für gegebene (φ, ψ) eine universelle Art und Weise gibt, Morphismen α und β zu finden, um ein kommutatives Quadrat zu erhalten? Oder die duale Frage dazu, ob es für gegebene α, β eine universelle Prozedur gibt, ein Paar φ, ψ zu finden, um ein kommutatives Quadrat zu erhalten. Darum geht es bei Pull-back und Push-out:

Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie, seien $\varphi : A \to X$ und $\psi : B \to X$ zwei Morphismen in $\mathcal{C}$. Ein *Pull-back* des Paares (φ, ψ) ist ein Objekt Y und ein Paar von Morphismen $\alpha : Y \to A$, $\beta : Y \to B$, so dass gilt $\varphi\alpha = \psi\beta$ und mit der folgenden universellen Eigenschaft: Ist $\gamma : Z \to A$ und $\delta : Z \to B$ ein Paar mit $\varphi\gamma = \psi\delta$, so existiert genau eine Abbildung $\zeta : Z \to Y$ mit $\gamma = \alpha\zeta$ und $\delta = \beta\zeta$:

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[rd, dotted, "\zeta"] \arrow[rrd, "\gamma"] \arrow[rdd, "\delta"'] & & \\
& Y \arrow[r, "\alpha"'] \arrow[d, "\beta"] & A \arrow[d, "\varphi"] \\
& B \arrow[r, "\psi"] & X
\end{tikzcd}$$

Wie beim Produkt (siehe Abschnitt 1.7) gilt: existiert ein Pull-back, so ist es eindeutig. Man kann also sagen, (Y, α, β) ist *das Pull-back* von φ und ψ. Zur Abkürzung sagt man auch, (α, β) oder auch Y sei das Pull-back von φ und ψ.

Der duale Begriff zum Pull-back ist das Push-out. Im obigen Quadrat ist φ, ψ das Push-out von α, β. (Details überlege man sich selber).

2.7 Modulerweiterungen

Sei

$$E : \quad 0 \to A \to B \to C \to 0$$

eine kurze exakte Folge von Λ-Moduln. Wir betrachten die lange exakte Ext-Folge, die man erhält, indem man $\mathrm{Hom}_\Lambda(-, A)$ anwendet:

$$0 \to \mathrm{Hom}_\Lambda(C, A) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(B, A) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(A, A) \overset{\omega_E}{\to} \mathrm{Ext}^1_\Lambda(C, A) \to \dots$$

(Notation: ω_E für den verbindenden Homomorphismus zur s.e.s. E).

Die Identität $1_A : A \to A$ in $\mathrm{Hom}_\Lambda(A, A)$ wird unter ω_E auf ξ_E in $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(C, A)$ abgebildet. Damit wird der kurzen exakten Folge E, einer sogenannten *Erweiterung von C durch A*, das Element $\Delta(E) = \xi_E$ in $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(C, A)$ zugeordnet.

Zwei Erweiterungen

$$E : \quad 0 \to A \to B \to C \to 0$$

und

$$E' : \quad 0 \to A \to B' \to C \to 0$$

von C durch A heissen *äquivalent*, wenn eine Abbildung $\varphi : B \to B'$ existiert, so dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & B \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & C \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] & B' \arrow[r] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

kommutiert. Man beachte, dass in diesem Fall $\varphi : B \to B'$ automatisch ein Isomorphismus ist (Fünfer-Lemma, Korollar 1.11)

Lemma 2.10. *Für zwei äquivalente Erweiterungen E und E' von C durch A gilt $\Delta(E) = \Delta(E') \in \operatorname{Ext}_\Lambda(C, A)$.*

Beweis. Die Natürlichkeit der langen exakten Ext-Sequenz liefert das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] & \operatorname{Hom}_\Lambda(B, A) \arrow[r] & \operatorname{Hom}_\Lambda(A, A) \arrow[r, "\omega_E"] & \operatorname{Ext}^1_\Lambda(C, A) \arrow[r] & \dots \\
\dots \arrow[r] & \operatorname{Hom}_\Lambda(B', A) \arrow[r] \arrow[u, "\varphi^*"] & \operatorname{Hom}_\Lambda(A, A) \arrow[r, "\omega_{E'}"] \arrow[u, equal] & \operatorname{Ext}^1_\Lambda(C, A) \arrow[r] \arrow[u, equal] & \dots
\end{tikzcd}$$

Daraus folgt sofort $\Delta(E) = \omega_E(1_A) = \omega'_E(1_A) = \Delta(E')$. ☐

Lemma 2.11. *Zu $\xi \in \operatorname{Ext}^1_\Lambda(C, A)$ existiert eine Erweiterung $E : 0 \to A \to B \to C \to 0$ mit $\Delta(E) = \xi$.*

Beweis. Wir wählen zu C eine projektive Präsentierung

$$P : \quad 0 \to R \overset{\mu}{\to} P \overset{\nu}{\to} C \to 0.$$

Daraus erhält man die exakte Sequenz

$$0 \to \operatorname{Hom}_\Lambda(C, A) \to \operatorname{Hom}_\Lambda(P, A) \to \operatorname{Hom}_\Lambda(R, A) \overset{\omega_P}{\to} \operatorname{Ext}^1_\Lambda(C, A) \to 0.$$

Zu gegebenem $\xi \in \operatorname{Ext}^1_\Lambda(C, A)$ existiert $\psi : R \to A$ mit $\omega_P(\psi) = \xi$. Wir konstruieren einen Modul B zusammen mit entsprechenden Abbildungen, so dass ein (kommutatives) Diagramm

$$\begin{tikzcd}
P: & 0 \arrow[r] & R \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\psi"] & P \arrow[r, "\nu"] \arrow[d, "\varphi"] & C \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
E: & 0 \arrow[r] & A \arrow[r] & B \arrow[r] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

entsteht. Wir definieren B als $(A \oplus P)/\{(\psi(r), \mu(r)) \mid r \in R\}$[1], die Abbildung $A \to B$ durch $A \to A \oplus P \twoheadrightarrow B$ und die Abbildung $P \to B$ durch $P \to A \oplus P \twoheadrightarrow B$. Die so definierte Abbildung $A \to B$ ist injektiv:
ist nämlich $(a, 0) = (0, 0) \mod \{(\psi(r), \mu(r)) \mid r \in R\}$, so existiert $s \in R$ mit $a = \psi(s)$ und $\mu(s) = 0$, also $s = 0$ und damit $a = 0$.

Ausserdem ergibt sich

$$B/A = (A \oplus P)/(\iota_A(A) + \{(\psi(r), \mu(r)) \mid r \in R\}) = P/\mu(R) \cong C.$$

Dies liefert die noch fehlende Abbildung $B \to C$.

---

[1] also das Push-out vom Paar (μ, ψ)

Wegen der Natürlichkeit erhält man aus dem obigen Diagramm mit Hilfe der langen Ext-Sequenzen:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_\Lambda(C,A) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathrm{Hom}_\Lambda(B,A) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi^*"] & \mathrm{Hom}_\Lambda(A,A) \arrow[r, "\omega_E"] \arrow[d, "\psi^*"] & \mathrm{Ext}^1_\Lambda(C,A) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \dots \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_\Lambda(C,A) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_\Lambda(P,A) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_\Lambda(R,A) \arrow[r, "\omega_P"] & \mathrm{Ext}^1_\Lambda(C,A) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Und daraus:

$$\Delta(E) = \omega_E(1_A) = \omega_P(\psi^*(1_A)) = \omega_P(\psi) = \xi \in \mathrm{Ext}^1_\Lambda(C,A),$$

was zu beweisen war. ☐

Lemma 2.12. *Zwei Erweiterungen*

$$E: \quad 0 \to A \to B \to C \to 0$$

und

$$E': \quad 0 \to A \to B' \to C \to 0$$

mit $\Delta(E) = \Delta(E') \in \mathrm{Ext}^1_\Lambda(C,A)$ *sind äquivalent.*

Beweis. Wir betrachten die projektive Präsentierung

$$0 \to R \overset{\mu}{\to} P \overset{\nu}{\to} C \to 0$$

von C und Abbildungen φ, ψ und φ', ψ', so dass die folgenden Diagramme kommutativ sind (man spricht in diesem Falle auch von *Hochhebungen der Identität* 1_C):

$$\begin{tikzcd}
P: & 0 \arrow[r] & R \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\psi"] & P \arrow[r, "\nu"] \arrow[d, "\varphi"] & C \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
E: & 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\kappa"] & B \arrow[r, "\tau"] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

und

$$\begin{tikzcd}
P: & 0 \arrow[r] & R \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\psi'"] & P \arrow[r, "\nu"] \arrow[d, "\varphi'"] & C \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
E': & 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\kappa'"] & B' \arrow[r, "\tau'"] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Wir werden später benötigen, dass φ und φ' surjektiv sind. Man kann dies erreichen, indem P "genügend" gross gewählt wird. Die zugehörigen langen exakten Ext-Folgen liefern dann zwei Diagramme, die hier in einem Diagramm kombiniert sind:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Hom}_\Lambda(A,A) \arrow[r, "{\omega_E,\omega_{E'}}"] \arrow[d, shift right, "\psi^*"'] \arrow[d, shift left, "(\psi')^*"] & \mathrm{Ext}^1_\Lambda(C,A) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \dots \\
\mathrm{Hom}_\Lambda(P,A) \arrow[r, "\mu^*"] & \mathrm{Hom}_\Lambda(R,A) \arrow[r, "\omega_P"] & \mathrm{Ext}^1_\Lambda(C,A) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Laut Voraussetzung gilt dann

$$\omega_E(1_A) = \Delta(E) = \Delta(E') = \omega_{E'}(1_A).$$

Daraus ergibt sich

$$\omega_P(\psi) = \omega_P\psi^*(1_A) = \omega_P\psi'^*(1_A) = \omega_P(\psi').$$

Also $\psi' - \psi \in \ker \omega_P$. Dann existiert $\chi : P \to A$ mit $\psi' - \psi = \mu^*(\chi) = \chi\mu$. Man ersetze nun im Diagramm für die Erweiterung $0 \to A \to B \to C \to 0$ die Abbildung ψ durch $\psi'' = \psi + \chi\mu = \psi'$ und φ durch $\varphi'' = \varphi + \kappa\chi$:

$$\begin{tikzcd}
P: & 0 \arrow[r] & R \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\psi''=" ', "\psi'"] & P \arrow[r, "\nu"] \arrow[d, "\varphi''=" ', "\varphi+\kappa\chi"] & C \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
E: & 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\kappa"] & B \arrow[r, "\tau"] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Wegen

$$\kappa(\psi + \chi\mu) = \kappa\psi + \kappa\chi\mu = \varphi\mu + \kappa\chi\mu = (\varphi + \kappa\chi)\mu$$

liefert dann φ'' und ψ'' eine Hochhebung von 1_C.

Die beiden Diagramme für φ' und ψ' einerseits wie für φ'' und ψ'' andrerseits unterscheiden sich wegen $\psi'' = \psi'$ nur unwesentlich. Man stellt insbesondere fest, dass $\ker \varphi' = \ker \varphi''$ gilt. Am Anfang haben wir dafür gesorgt, dass φ (und damit φ'') und φ' surjektiv sind. Daher gibt es zwischen $B \cong P/\ker \varphi''$ und $B' \cong P/\ker \varphi'$ einen mit den Abbildungen κ, κ', τ, τ' kompatiblen Homomorphismus $\beta : B \to B'$, welcher sowohl in A wie auch in C die Identität induziert. Die Erweiterungen E und E' sind somit äquivalent. □

Damit haben wir das folgende Resultat erhalten:

Satz 2.13. *Die Menge der Äquivalenzklassen von Erweiterungen von C durch A entspricht bijektiv der Gruppe* $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(C, A)$.

Bemerkung.

1. Die Menge der Äquivalenzklassen von Erweiterungen von C durch A trägt laut diesem Satz eine abelsche Gruppenstruktur.

2. Das Nullelement der Gruppe $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(C, A)$ entspricht der zerfallenden Erweiterung

$$0 \to A \overset{\iota_A}{\to} A \oplus C \overset{\pi_C}{\to} C \to 0.$$

   Dies schliesst man aus der Tatsache, dass in der langen Ext-Sequenz $1_A \in \mathrm{Hom}_\Lambda(A, A)$ als Bild der Projektion $A \oplus C \to C$ auftritt.

3. Ist C projektiv, so zerfällt jede Erweiterung von C.

Zum Schluss beschreiben wir, wie sich die induzierten Abbildungen in den Ext-Gruppen auf der Ebene der Erweiterungen darstellen.

Sei zuerst das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & B \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] & B' \arrow[r] & C' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

gegeben. Daraus erhält man das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[r] & \mathrm{Hom}_\Lambda(B', A) \arrow[r] \arrow[d, "\beta^*"] & \mathrm{Hom}_\Lambda(A, A) \arrow[r, "\omega'"] \arrow[d, equal] & \mathrm{Ext}^1_\Lambda(C', A) \arrow[r] \arrow[d, "\gamma^*"] & \ldots \\
\ldots \arrow[r] & \mathrm{Hom}_\Lambda(B, A) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_\Lambda(A, A) \arrow[r, "\omega"] & \mathrm{Ext}^1_\Lambda(C, A) \arrow[r] & \ldots
\end{tikzcd}$$

Die obere Erweiterung wird beschrieben durch $\xi = \omega(1_A)$, die untere durch $\xi' = \omega'(1_A)$. Wegen der Kommutativität des Diagrammes gilt $\gamma^*(\xi') = \xi$. Ist das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & B \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & C \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r] & B' \arrow[r] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

gegeben, so erhält man das induzierte kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[r] & \mathrm{Hom}_\Lambda(B', A') \arrow[r] \arrow[d, "\beta^*"] & \mathrm{Hom}_\Lambda(A', A') \arrow[r, "\omega'"] \arrow[d, "\alpha^*"] & \mathrm{Ext}^1_\Lambda(C, A') \arrow[r] \arrow[d, equal] & \ldots \\
\ldots \arrow[r] & \mathrm{Hom}_\Lambda(B, A') \arrow[r] & \mathrm{Hom}_\Lambda(A, A') \arrow[r, "\overline{\omega'}"] & \mathrm{Ext}^1_\Lambda(C, A') \arrow[r] & \ldots \\
\ldots \arrow[r] & \mathrm{Hom}_\Lambda(B, A) \arrow[r] \arrow[u, "\alpha_*"] & \mathrm{Hom}_\Lambda(A, A) \arrow[r, "\omega"] \arrow[u, "\alpha_*"] & \mathrm{Ext}^1_\Lambda(C, A) \arrow[r] \arrow[u, "\alpha_*"] & \ldots
\end{tikzcd}$$

Die obere Erweiterung wird beschrieben durch $\xi = \omega(1_A)$, die untere durch $\xi' = \omega'(1'_A)$. Aus der Kommutativität des Diagrammes folgt dann $\alpha_*(\xi) = \overline{\omega'}(\alpha) = \omega'(1_{A'}) = \xi'$.

2.8 Spezielle Ringe, Beispiele

[Vorlesung 8, 19.5.2014] In diesem Abschnitt betrachten wir vier verschiedene Beispiele von Ringen.

(a) Halbeinfache Ringe

Ein Λ-Modul M heisst *einfach* oder *irreduzibel*, wenn $M \neq 0$ ist und M keine nichttrivialen Untermoduln besitzt (i.e. keine Untermoduln ausser sich selbst und dem Nullmodul). M heisst *halbeinfach* (oder *vollständig reduzibel*), wenn jeder Untermodul $U \subset M$ in M einen direkten Summanden U' besitzt, i.e. $M = U \oplus U'$. Äquivalent dazu: M lässt sich als direkte Summe von irreduziblen Moduln schreiben.

Es ist klar, dass direkte Summen von halbeinfachen Moduln auch halbeinfach sind.

Definition. Ein Ring Λ heisst *halbeinfach*, wenn jeder Λ-Modul halbeinfach ist.

(Anders gesagt: Λ als Modul über sich selbst ist halbeinfach).

Man weist im Allgemeinen nach, dass für einen Ring Λ für jede Inklusion $U \subset M$ ein Komplement U' zu U existiert, um zu zeigen, dass Λ halbeinfach ist. Damit erhält man

(i) Ein Körper k ist halbeinfach.

(ii) Die Gruppenalgebra[2] $\mathbb{C}G$ einer endlichen Gruppe G ist halbeinfach.

(iii) Der volle Matrizenring $M_n(k)$ über einem Körper k ist halbeinfach.

Mittels Ext kann man halbeinfache Ringe wie folgt charakterisieren:

Satz 2.14. *Es sei* Λ *ein Ring. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(i) Λ *ist halbeinfach.*

(ii) Für alle Λ*-Moduln* A, B *gilt* $\operatorname{Ext}^1_\Lambda(A, B) = 0$.

(iii) Für alle Λ*-Moduln* A, B, $\forall\ n \geq 1$ *gilt* $\operatorname{Ext}^n_\Lambda(A, B) = 0$.

Beweis. Ist Λ halbeinfach, so besitzt jeder Untermodul einen direkten Summanden und umgekehrt. Dies ist äquivalent zur Aussage, dass jede kurze exakte Folge zerfällt, also $\operatorname{Ext}^1_\Lambda(A, B) = 0$.

Dann benutzt man Satz 2.9.

□

Korollar 2.15. *Es sei* Λ *halbeinfach. Dann ist jeder* Λ*-Modul projektiv.*

Proof. Ist klar aus Obigem und Satz 2.9. □

Satz 2.16. *Sei* A *ein halbeinfacher Modul über einem (beliebigen) Ring* Λ*. Dann ist auch jeder Untermodul* V *von* A *und jeder Quotientenmodul* A/V *halbeinfach.*

Beweis. Wir zeigen, dass jede exakte Folge $0 \to U \to V \to V/U \to 0$ zerfällt. Dazu betrachten wir das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & U \arrow[r] \arrow[d, equal] & V \arrow[r] \arrow[d] & V/U \arrow[r] \arrow[d, "\iota"] & 0 \\
0 \arrow[r] & U \arrow[r] & A \arrow[r] & A/U \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Da A halbeinfach ist, wird die untere Erweiterung durch $0 = \xi \in \operatorname{Ext}^1_\Lambda(A/U, U)$ beschrieben. Nach Abschnitt 2.7 wird die obere Erweiterung dann in $\operatorname{Ext}^1_\Lambda(V/U, U)$ durch $\iota^*(\xi) = \iota^*(0) = 0$ beschrieben. Damit zerfällt auch die obere Erweiterung. Es ist also jeder

---

[2] G eine endliche Gruppe, R ein kommutativer Ring. Die *Gruppenalgebra* RG hat als Elemente die formalen Linearkombinationen $\sum_i r_i g_i$, wobei $r_i \in R$, $g_i \in G$ ist. Die Addition ist gegeben durch $\sum_i r_i g_i + \sum_i r'_i g_i = \sum_i (r_i + r'_i) g_i$ die Multiplikation durch $(\sum_i r_i g_i)(\sum_j r'_j g_j) = \sum_{ij} r_i r'_j (g_i g_j)$. Es gilt: RG ist frei vom Rang $|G|$.

Untermodul von A wieder halbeinfach.

Um zu zeigen, dass jeder Quotientenmodul A/V halbeinfach ist, betrachten wir das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & U \arrow[r] \arrow[d, "\pi"'] & A \arrow[r] \arrow[d] & A/U \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & U/V \arrow[r] & A/V \arrow[r] & A/U \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Wie im obigen Fall wird die obere Erweiterung durch $0 = \xi \in \mathrm{Ext}^1_\Lambda(A/U, U)$ beschrieben. Die untere Erweiterung wird in $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(A/U, U/V)$ demnach durch $\pi_*(\xi) = \pi_*(0) = 0$ beschrieben. Der Quotientemodul A/V ist damit halbeinfach. ☐

(b) Abelsche Gruppen

Wir betrachten die kurze exakte Folge

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{q} \mathbb{Z} \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \to 0$$

Für $q \neq 1$ ist dies eine nicht-zerfallende Erweiterung. Sie ist gleichzeitig eine projektive Präsentierung von $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$. Daraus ergibt sich die Folge

$$0 \to \mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\varepsilon^*} \mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \xrightarrow{q^*} \mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \to \mathrm{Ext}^1_\mathbb{Z}(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \to 0$$

Die Hom-Gruppen und die induzierten Homomorphismen lassen sich bestimmen, man erhält:

$$0 \to 0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{q} \mathbb{Z} \to \mathrm{Ext}^1_\mathbb{Z}(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \to 0.$$

Daraus ergibt sich

$$\mathrm{Ext}^1_\mathbb{Z}(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}.$$

Es gibt also neben der zerfallenden Erweiterung $0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \to 0$ noch $q-1$ andere Äquivalenzklassen von nicht-zerfallenden Erweiterungen. Ist q eine Primzahl, so lässt sich zeigen, dass diese Erweiterungen alle von der Form $0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \to 0$ sind, wo ε das Einselement von $\mathbb{Z}$ auf ein nicht-triviales Element von $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ abbildet. Die einzelnen Äquivalenzklassen nicht-trivialer Erweiterungen unterscheiden sich in diesem Fall einzig durch die *verschiedenen* surjektiven Homomorphismen ε. Der Fall, wo q keine Primzahl ist wird als Übung gelassen.

Für abelsche Gruppen lässt sich zeigen, dass die höheren Ext-Gruppen ($n \geq 2$) alle verschwinden. Dies folgt aus dem folgenden Satz, hier ohne Beweis:

Satz 2.17. *Ist U eine Untergruppe einer freien abelschen Gruppe, so ist U ebenfalls frei abelsch.*

Korollar 2.18. *Für abelsche Gruppen A und B ist $\mathrm{Ext}^n_\mathbb{Z}(A, B) = 0$ für alle $n \geq 2$.*

Beweis. Sei $0 \to R \to P_0 \to A \to 0$ eine projektive Präsentierung von A mit P_0 frei (abelsch). Dann ist nach dem obigen Satz R ebenfalls frei. Setzen wir also $P_1 = R$, so ist

$$0 \to P_1 \to P_0 \to A \to 0$$

eine projektive Resolution. Berechnet man mit dieser die Ext-Gruppen $\operatorname{Ext}^n_{\mathbb{Z}}(A, B)$ aus (mit Hilfe von $\operatorname{Hom}(-, B)$), so folgt daraus die Behauptung des Korollars (man betrachte die lange Ext-Folge, die entsteht). □

Bemerkung. Wegen der Eigenschaft $\operatorname{Ext}^n_{\mathbb{Z}}(A, B) = 0$ (für $n \geq 2$) sagt man, die Kategorie der $\mathbb{Z}$-Moduln sei *erblich* (*hereditär*). Allgemeiner: eine abelsche Kategorie $\mathcal{C}$ heisst *erblich*, falls die Gruppen $\operatorname{Ext}^n_{\mathcal{C}}(X, Y) = 0$ sind für alle $n \geq 2$, für alle $X, Y \in \operatorname{Ob}(\mathcal{C})$. Beispiel einer erblichen Kategorie ist die Kategorie **mod**-Λ aller endlich-dimensionalen Rechts-Moduln über einer endlich-dimensionalen erblichen Algebra Λ. (Eine Algebra heisst *erblich*, falls alle Untermoduln von projektiven Moduln wiederum projektiv sind. Zum Beispiel ist die Wegealgebra kQ eines endlichen Köchers Q ohne orientierte Zyklen erblich). Weitere Beispiele von erblichen Kategorien sind beschränkte derivierte Kategorien von kQ-Moduln und Cluster Kategorien.

(c) Der Ring $\Lambda = \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$

Sei $A = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Es lässt sich für A leicht eine projektive (sogar freie) Auflösung angeben:

$$\cdots \to P_n \to P_{n-1} \to \cdots \to P_1 \to P_0 \to A \to 0,$$

indem man $P_n = \Lambda$, $n = 0, 1, \ldots$ setzt und das Differential ∂ durch $\partial(1_\Lambda) = p + p^2\mathbb{Z}$ definiert. Für $B = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ergibt sich daraus

$$\operatorname{Ext}^n_\Lambda(A, B) = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$$

für $n = 0, 1, \ldots$.

(d) Der Ring kC_p

Es sei C_p die zyklische Gruppe der Ordnung p, p prim, sei k ein Körper der Charakteristik p, zB $\mathbb{F}_p$. Ist t ein erzeugendes Element von C_p, so lassen sich die Elemente von kC_p schreiben als

$$\sum_{i=0}^{p-1} k_i t^i$$

Setzen wir $x = t - 1$, so gilt $x^p = 0$ und die Elemente x^i mit $i = 0, 1, \ldots, p-1$ sind linear unabhängig. Damit erhalten wir mit $1 = x^0, x^1, x^2, \ldots, x^{p-1}$ eine (neue) Basis von kC_p, und kC_p wird isomorph zum Ring $\Lambda = k[x]/(x^p)$.

Wir betrachten nun den (trivialen) Modul $A = k$. Dafür lässt sich eine projektive (sogar freie) Auflösung angeben: Sei $P_n = \Lambda$ für $n = 0, 1, 2, \ldots$ und sei das Differential wie folgt definiert:

$$\partial_n(1_\Lambda) = \begin{cases} x & \text{für ungerade } n \\ x^{p-1} & \text{für gerade } n \end{cases}$$

Mit diesem Komplex hat man eine projektive Auflösung P des Moduls $A = k$ definiert. Sie kann für die Berechnung der Ext-Gruppen (hier Vektorräume über k) benutzt werden. Sei beispielsweise $B = k$. Dann ist $\mathrm{Hom}_\Lambda(P_n, k) = k$ und das Differential ∂_n in $\mathrm{Hom}_\Lambda(P, k)$ ist durchwegs trivial. Man erhält deshalb $\mathrm{Ext}^n_\Lambda(k, k) = k$ für alle $n \geq 0$.

Bemerkung. Wir werden später sehen, dass es für eine p-Gruppe[3] G über einem Körper k der Charakteristik p nur einen einzigen einfachen Modul gibt nämlich den ein-dimensionalen trivialen Modul k. Da jeder kG-Modul durch Zusammenkleben von eindimensionalen Kompositionsfaktoren entsteht, ist es wichtig, die Gruppe $\mathrm{Ext}^1_{kG}(k, k)$ zu verstehen. Das Beispiel (d) behandelt den Fall $|G| = p^1$.

---

[3] i.e. eine Gruppe deren Ordnung eine Potenz von p ist, p prim

Kapitel 3

Endlich dimensionale Algebren, Gruppenalgebren

Im Kapitel 3 bezeichnet Λ im Allgemeinen die Gruppenalgebra kG einer endlichen Gruppe G. Die Resultate in den Abschnitten 3.1 und 3.2 sind aber für eine beliebige endlich dimensionale Algebra Λ über dem Körper k gültig; die Formulierung in diesen beiden Abschnitten ist entsprechend angepasst.

3.1 Blöcke von endlich dimensionalen Algebren

Zur Erinnerung: ein Λ-Modul M heisst *einfach*, wenn $M \neq 0$, und wenn aus $0 \neq N \subseteq M$ immer folgt, dass $N = M$ ist.

Definition. Zu Λ definieren wir einen Graphen $\Gamma = \Gamma(\Lambda)$ wie folgt: die Punkte entsprechen eineindeutig den Isomorphieklassen der einfachen Λ-Moduln M_1, M_2, $\ldots$, die nummeriert seien. (Wir werden später sehen, dass es nur endlich viele Isomorphieklassen von einfachen Λ-Moduln gibt, siehe Theorem 3.10). Man hat eine Kante zwischen M_i und M_j genau dann, wenn $\operatorname{Ext}^1_\Lambda(M_i, M_j) \neq 0$ oder $\operatorname{Ext}^1_\Lambda(M_j, M_i) \neq 0$ ist. $\Gamma(\Lambda)$ heisst dann der *Graph von* Λ.

Wir sagen, die Moduln M_i und M_j *liegen im selben Block von* Λ, falls M_i und M_j in derselben Zusammenhangskomponente von $\Gamma(\Lambda)$ liegen.

Beispiel. Es sei Λ halbeinfach. Dann sind nach Korollar 2.15 alle Λ-Moduln projektiv. Es gilt also insbesondere auch für einfache Moduln M_i und M_j stets $\operatorname{Ext}^1_\Lambda(M_i, M_j) = 0$. Damit bildet jeder einfache Λ-Modul einen Block für sich.

Wir werden im Folgenden nur Λ-Moduln betrachten, welche als k-Vektorraum eine endliche Dimensionen aufweisen. Sei A ein Λ-Modul. In diesem Fall existiert in A eine *Kompositionsreihe*, d.h. eine Reihe

$$0 = A_0 \subset A_1 \subset \cdots \subset A_n = A$$

von Untermoduln, so dass die Faktormoduln A_i/A_{i-1} einfach sind, $i = 1, 2, \dots, n$. Die Faktoren A_i/A_{i-1} sind nach dem Satz von Jordan-Hölder[1] bis auf Reihenfolge und Isomorphie eindeutig bestimmt. Man nennt A_i/A_{i-1} die *Kompositionsfaktoren von A* und n die *Kompositionslänge*.

Wir beweisen als Erstes das folgende Lemma. (Dabei bezeichnen M_1, M_2, etc. Vertreter der Isomorphieklassen von einfachen Moduln).

Lemma 3.1. *Es seien A_1 und A_3 zwei Λ-Moduln endlicher k-Dimension. Es gelte: Ist M_1 ein Kompositionsfaktor von A_1 und M_3 ein Kompositionsfaktor von A_3, so liegen M_1 und M_3 nicht im selben Block von Λ.*
Dann zerfällt jede kurze exakte Folge $0 \to A_1 \to A_2 \to A_3 \to 0$.

Beweis. Es ist zu zeigen, dass $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(A_3, A_1) = 0$ ist. Wir beweisen dies mit Induktion nach der Summe der Kompositionslängen von A_1 und A_3:
- Sind A_1 und A_3 einfach, so folgt die Behauptung direkt aus der Definition der Blöcke.
- Induktionsschritt:

Ist A_1 nicht einfach, so betrachten wir einen einfachen Untermodul $\overline{M}$ von A_1 und die zu der kurzen exakten Folge $0 \to \overline{M} \to A_1 \to A_1/\overline{M} \to 0$ gehörige lange Ext-Folge (mit Hilfe von $\mathrm{Hom}(A_3, -)$):

$$\cdots \to \mathrm{Ext}^1_\Lambda(A_3, \overline{M}) \to \mathrm{Ext}^1_\Lambda(A_3, A_1) \to \mathrm{Ext}^1_\Lambda(A_3, A_1/\overline{M}) \to \dots$$

Gemäss Induktionsvoraussetzung gilt $\mathrm{Ext}^1(A_3, \overline{M}) = 0$ und $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(A_3, A_1/\overline{M}) = 0$, da die Summe der Kompositionslängen der beiden involvierten Moduln jeweils kleiner ist (als die Summe der Kompositionslängen von A_1 und A_3). Damit folgt wegen der Exaktheit der Folge auch $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(A_1, A_3) = 0$.

Der Beweis für den Fall, wo A_3 nicht einfach ist, folgt völlig analog. ☐

[Vorlesung 9, 26.5.2014]

Damit können wir folgendes beweisen.

Satz 3.2. *Sei A ein Λ-Modul mit $\dim_k A < \infty$. Dann lässt sich A schreiben als $A_1 \oplus A_2 \oplus \dots \oplus A_m$, wobei gilt:*
(i) die Kompositionsfaktoren von A_i liegen alle im gleichen Block;
(ii) die Kompositionsfaktoren von A_i und A_j, $i \neq j$, liegen in verschiedenen Blöcken.

Beweis. Wir beweisen die Aussage mit Induktion nach der Kompositionslänge von A.
- Für Länge 1 ist nichts zu tun.
- Es sei M ein einfacher Untermodul von A. Dann betrachten wir

$$(*) \qquad 0 \to M \to A \to A/M \to 0$$

Da A/M kleinere Kompositionslänge besitzt als A, lässt sich A/M nach Induktionsvoraussetzung in der verlangten Art schreiben als $\overline{A_1} \oplus \overline{A_2} \oplus \dots \oplus \overline{A_m}$.

---

[1] Zwei beliebige Kompositionsreihen einer Gruppe G sind äquivalent (i.e. besitzen die gleichen Faktoren).

(a) Gibt es in A/M keinen Kompositionsfaktor, der im gleichen Block wie M liegt, so folgt die Behauptung sofort aus Lemma 3.1 angewendet auf die Folge $(*)$, die also zerfällt und es ist $A = M \oplus \overline{A_1} \oplus \overline{A_2} \oplus \cdots \oplus \overline{A_m}$.

(b) Gibt es in A/M einen Kompositionsfaktor, der im gleichen Block wie M liegt, so können wir annehmen, er liege in $\overline{A_1}$. In diesem Fall definieren wir $A_1 = \pi^{-1}(\overline{A_1})$ (wobei $\pi : A \to A/M$ die Abbildung auf den Quotientenmodul ist). Wir betrachten dann die kurze exakte Folge

$$0 \to A_1 \to A \to \overline{A_2} \oplus \cdots \oplus \overline{A_m} \to 0.$$

Gemäss dem Lemma 3.1 zerfällt diese Folge, so dass in diesem Fall gilt:

$$A = A_1 \oplus \overline{A_2} \oplus \cdots \oplus \overline{A_m}.$$

Das war zu beweisen. □

Definition. Ein Modul A heisst *unzerlegbar*, wenn $A = A_1 \oplus A_2$ stets $A_1 = 0$ oder $A_2 = 0$ impliziert.

Einfache Moduln sind unzerlegbar. Die Umkehrung gilt jedoch i.A. nicht: es gibt (bei nicht halbeinfachen Ringen) noch andere unzerlegbare Moduln.

Korollar 3.3. *Es sei A ein unzerlegbarer Modul. Dann liegen alle Kompositionsfaktoren von A im gleichen Block.*

Man sagt dann auch oft, *der unzerlegbare Modul A liege im Block*, zu dem seine Kompositionsfaktoren gehören.

Schliesslich erwähnen wir hier noch ohne Beweis den allgemeinen modultheoretischen Satz von Krull-Remak-Schmidt:

Satz 3.4. *Sei A ein endlich dimensionaler Modul, $A = A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_m$ mit A_i unzerlegbar, $i = 1, \ldots, m$. Dann sind die Summanden $A_1, \ldots, A_m$ bis auf Isomorphie und Reihenfolge eindeutig bestimmt.*

Einen Beweis findet man z.B. im Buch [B] von Benson.

3.2 Prinzipale unzerlegbare Moduln

Wir schreiben den links-Modul Λ als direkte Summe von unzerlegbaren Moduln P_i, $\Lambda = P_1 \oplus P_2 \oplus \cdots \oplus P_m$. Die Moduln P_i heissen die *prinzipalen unzerlegbaren Moduln von* Λ. Nach Satz 3.4 (Krull-Remak-Schmidt) sind sie bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt. Als direkte Summanden in einem freien Modul sind sie ausserdem projektiv. Im folgenden werden wir die Struktur der prinzipalen unzerlegbaren Moduln etwas näher betrachten. Dazu benötigen wir einige Vorbereitungen.

Satz 3.5. *Sei A ein (über k) endlich-dimensionaler Λ-Modul. Dann existiert ein kleinster Untermodul A' mit A/A' halbeinfach.*

Beweis. Es sei $\mathcal{F}$ die Familie der Untermoduln B von A mit A/B halbeinfach. Man setze $A' = \cap_{B \in \mathcal{F}} B$. Aus Dimensionsgründen kann man sich bei der Durchschnittsbildung auf endlich viele Moduln $B_1, B_2, \ldots, B_n$ beschränken. Wir behaupten, dass A/A' halbeinfach ist. In der Tat ist die Abbildung $A/A' \to \oplus_{i=0}^{n} A/B_i$ offensichtlich injektiv. Damit ist A/A' isomorph zu einem Untermodul eines halbeinfachen Moduls, also selber halbeinfach (Satz 2.16). Damit ist A' der gesuchte kleinste Untermodul mit A/A' halbeinfach. ☐

Definition. Das *Jacobson-Radikal* eines Λ-Moduls A ist definiert als kleinster Untermodul $JA = A'$ mit A/A' halbeinfach.

Definition. Der Quotient A/JA heisst der *Kopf von A*.

Der Kopf von A ist der grösste halbeinfache Quotient von A: ist C halbeinfach und $\varphi : A \to C$ ein surjektiver Homomorphismus, so folgt $JA \subset \ker \varphi$ und $\varphi : A \to C$ faktorisiert über $\varphi' : A/JA \to C$. Da jeder Untermodul eines halbeinfachen Moduls wieder halbeinfach ist, gilt dies sogar für beliebige (und nicht nur surjektive) Homomorphismen $\varphi : A \to C$.

Das Resultat kann auch mit Hilfe der Hom-Gruppen ausgedrückt werden: Ist $\pi : A \to A/JA$ die kanonische Projektion, so ist für jeden halbeinfachen Modul C der induzierte Homomorphismus

$$\pi^* \ : \mathrm{Hom}_\Lambda(A/JA, C) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(A, C)$$

ein Isomorphismus.

Satz 3.6. *Es sei P ein prinzipaler unzerlegbarer Modul. Dann ist P/JP einfach.*

Der Beweis ergibt sich mit Hilfe des folgenden Lemmas:

Lemma 3.7 (Fitting Lemma)**.** *Es sei Q ein unzerlegbarer Modul und $\psi : Q \to Q$ ein Endomorphismus. Dann ist ψ entweder ein Isomorphismus oder ψ ist nilpotent, d.h. es gibt ein $m > 0$, so dass $\psi^m = 0$ ist.*

Beweis. Wir betrachten die Folge der Untermoduln $\mathrm{im}\, \psi \supseteq \mathrm{im}\, \psi^2 \supseteq \mathrm{im}\, \psi^3 \supseteq \ldots$. Wegen der endlichen Dimension von Q muss die Folge dieser Untermoduln stationär werden. Es gibt also eine kleinste Zahl m mit $\mathrm{im}\, \psi^m = \mathrm{im}\, \psi^{m+1} = \mathrm{im}\, \psi^{m+2} = \ldots$.

Behauptung: $\ker \psi^m \cap \mathrm{im}\, \psi^m = 0$.
Es sei $a = \psi^m(b) \in \ker \psi^m$. Dann folgt $0 = \psi^m(a) = \psi^{2m}(b)$, d.h. $b \in \ker \psi^{2m}$. Aber $\ker \psi^{2m} = \ker \psi^m$, d.h. $b \in \ker \psi^m$, womit gilt $a = \psi^m(b) = 0$.

Aus Dimensionsgründen folgt daraus $Q = \ker \psi^m \oplus \mathrm{im}\, \psi^m$. Wegen der Unzerlegbarkeit von Q muss einer der beiden direkten Summanden 0 sein. Im Fall $\ker \psi^m = 0$ ist ψ^m und damit ψ selbst ein Isomorphismus, im Fall $\mathrm{im}\, \psi^m = 0$ ist ψ nilpotent. ☐

Beweis von Satz 3.6. Wir zeigen: Die Annahme $P/JP = M \oplus N$ mit $M \neq 0 \neq N$ führt zu einem Widerspruch.
Die Annahme liefert surjektive Homomorphismen $\pi : P \to M$ und $\tau : P \to N$. Die Abbildung τ gibt einen surjektiven Homomorphismus τ' von $Q := \ker \pi$ nach N, $\tau' = \tau \mid Q : Q \to N$. Da P projektiv ist, gibt es dann einen Homomorphismus $\varphi : P \to Q$ mit $\tau'\varphi = \tau$. Wir definieren $\psi : P \to P$ durch $\psi : P \xrightarrow{\varphi} Q \subset P$. Da Q kleinere Dimension hat als P, ist φ und damit auch ψ nicht injektiv.

Andrerseits ist wegen $\tau = \tau\psi = \tau\psi^2 = \cdots = \tau\psi^n$ die Abbildung ψ nicht nilpotent. Dies ist ein Widerspruch zur Aussage des Lemmas 3.7. □

Satz 3.8. *Zu jedem einfachen Modul M gibt es einen prinzipalen unzerlegbaren Modul P mit $P/JP = M$.*

Beweis. Es sei $0 \neq m$ in M. Definiere $\varphi : \Lambda \to M$ durch $\varphi(\lambda) = \lambda m$, $\lambda \in \Lambda$. Da M einfach ist, ist φ surjektiv. Wegen $\Lambda = P_1 \oplus \cdots \oplus P_n$ muss mindestens ein P_i nicht-trivial auf M abgebildet werden. Für dieses P_i gilt die Behauptung des Satzes. □

Satz 3.9. *Es seien P_1 und P_2 zwei prinzipale unzerlegbare Moduln mit Kopf M. Dann gilt $P_1 \cong P_2$.*

(Vor dem Beweis:)
Zusammengefasst haben wir damit folgendes erhalten:

Theorem 3.10. *Die Zuordnung $P \rightsquigarrow P/JP$ liefert eine Bijektion zwischen den Isomorphieklassen der prinzipalen unzerlegbaren Moduln und den Isomorphieklassen der einfachen Moduln.*

Beweis Satz 3.9. Wir verwenden das Lemma 3.7. Seien $\pi_i : P_i \to P_i/JP_i \cong M$, $i = 1, 2$, die beiden Projektionen auf die einfachen Quotienten, die beide isomorph zu M sind. Die Projektivität von P_1 liefert einen Homomorphismus $\beta_1 : P_1 \to P_2$ mit $\pi_2\beta_1 = \pi_1 : P_1 \to M$. Die Projektivität von P_2 einen Homomorphismus $\beta_2 : P_2 \to P_1$ mit $\pi_1\beta_2 = \pi_2 : P_2 \to M$. Für die Zusammensetung $\psi : \beta_2\beta_1 : P_1 \to P_1$ gilt dann $\pi_1\psi = \pi_1$. Wir haben also einen Endomorphismus von P_1 gewonnen, der wegen $\pi_1 = \pi_1\psi = \pi_1\psi^2 = \dots$ nicht nilpotent sein kann. Nach Lemma 3.7 ist ψ also ein Isomorphismus. Insbesondere ist β_1 injektiv und β_2 surjektiv. Vertauscht man die Rollen von β_1 und β_2, so erhält man, dass β_1 surjektiv ist und β_2 injektiv. Sie sind also Isomorphismen. □

Im folgenden wird der Begriff der *Loewy-Reihe* eines Moduls eine Rolle spielen. Darunter versteht man die am schnellsten absteigende Reihe von Untermoduln, deren sukzessive Faktoren halbeinfach sind. Für den Modul A lässt sich die Loewy-Reihe beschreiben durch

$$A \supseteq JA \supseteq J^2A \supseteq \cdots \supseteq J^{n-1}A \supseteq J^nA \supseteq \cdots,$$

wobei $J^kA = J(J^{k-1}A)$ sei. Wegen der endlichen Dimension von A endet die Reihe immer mit 0. Es gibt also eine kleinste Zahl n mit $J^nA = 0$. Diese Zahl heisst die *Loewy-Länge von A*. Sie entspricht der Anzahl nicht-trivialer *Loewy-Schichten von A*.

Satz 3.11. *Es seien M und N zwei einfache Λ-Moduln. Dann gilt*

$$\operatorname{Ext}^1_\Lambda(M,N) = \operatorname{Hom}_\Lambda(JP/J^2P, N),$$

wo P der prinzipale unzerlegbare Modul mit Kopf M ist. Insbesondere ist $\operatorname{Ext}^1_\Lambda(M,N)$ genau dann nicht-trivial, wenn N als direkter Summand in JP/J^2P auftaucht.

[Vorlesung 10, 16.6.2014]

Beweis. Wir betrachten die kurze exakte Folge $0 \to JP \xrightarrow{\mu} P \xrightarrow{\nu} M \to 0$ und den Beginn der dadurch induzierten langen Ext-Folge, wobei wir an zweiter Stelle den (einfachen) Modul N einsetzen:

$$0 \to \operatorname{Hom}_\Lambda(M,N) \xrightarrow{\nu^*} \operatorname{Hom}_\Lambda(P,N) \xrightarrow{\mu^*} \operatorname{Hom}_\Lambda(JP,N) \to \operatorname{Ext}^1_\Lambda(M,N) \to 0$$

Es gilt dann

$$\operatorname{Hom}_\Lambda(M,N) = \operatorname{Hom}_\Lambda(P/JP, N)$$

und

$$\operatorname{Hom}_\Lambda(JP,N) = \operatorname{Hom}_\Lambda(JP/J^2P, N).$$

(diese Gleichheit folgt mit den Ueberlegungen nach der Definition vom Kopf.)
Da μ^* die Nullabbildung ist, entnimmt man aus der exakten Folge den Isomorphismus

$$\operatorname{Ext}^1_\Lambda(M,N) = \operatorname{Hom}_\Lambda(JP/J^2P, N)$$

wie gewünscht. (Dass μ^* die Nullabbildung ist, kann man sich überlegen: Es gibt nur zwei Möglichkeiten, wie das Bild von einem Homomorphismus β von P nach N aussieht, da N einfach ist. Ist der Homomorphismus β nicht die Nullabbildung, so ist sein Bild unter μ^* ein Homomorphismus von JP nach N und das muss dann die Nullabbildung sein). ☐

3.3 Gruppenalgebra einer p-Gruppe

Es sei nun G eine p-Gruppe, d.h. eine Gruppe deren Ordnung eine Potenz der Primzahl p ist, wir betrachten ab jetzt Moduln über kG.

Satz 3.12. *Es seien G eine p-Gruppe und k ein Körper der Charakteristik p. Dann ist k der einzige einfache kG-Modul und kG ist unzerlegbar.*

Für den Beweis brauchen wir folgendes Lemma:

Lemma 3.13. *Es sei G eine p-Gruppe und k ein Körper der Charakteristik p. Ist M ein kG-Modul, $M \neq 0$, dann existiert $0 \neq b \in M$, mit $xb = b$ für alle $x \in G$.*

Beweis. Man betrachte $0 \neq a \in M$ und die Unter*gruppe* A von M erzeugt von allen xa, $x \in G$. Als homomorphes Bild von $\mathbb{F}_pG$ besitzt A eine p-Potenzordnung. Die Einteilung von A in Bahnen unter der G-Operation ergibt $A = A^G \cup C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_m$, wo A^G die Fixelemente und C_i, $i = 1, 2, \ldots, m$ die Bahnkurven $|C_i| \geq 2$. Da $|C_i|$ eine p-Potenz ist, folgt $|A| \equiv |A^G| \mod p$. Damit kann A^G nicht nur aus dem Nullelement bestehen. Es gibt also ein nichtriviales Fixelement $0 \neq b \in A^G$. ☐

Beweis des Satzes 3.12. Es sei M ein einfacher kG-Modul. Nach Lemma 3.13 existiert ein nicht-triviales Fixelement $b \in M$. Dann ist aber $kb \subset M$ ein nicht-trivialer Untermodul von M. Da M einfach ist, folgt daraus $M = kb \cong k$.

Um zu zeigen, dass kG unzerlegbar ist, betrachten wir die Projektion $\pi : kG \to kG/J(kG)$. Da k der einzige einfache kG-Modul ist, muss $kG/J(kG)$ eine direkte Summe von Kopien von k sein. Insbesondere ist die Operation von G in $kG/J(kG)$ trivial. Für die Elemente $x - 1 \in kG$, $x \in G$ folgt daraus

$$\pi(x-1) = \pi(x) - \pi(1) = \pi(x \cdot 1) - \pi(1) = x\pi(1) - \pi(1) = \pi(1) - \pi(1) = 0.$$

Die Element der Form $x - 1$, $x \in G$ spannen aber in kG einen k-Unterraum der Kodimension 1 auf. Da π nicht die Nullabbildung ist, folgt $\dim_k(kG/J(kG)) = 1$. Ist nun $kG = P_1 \oplus \cdots \oplus P_m$ die Zerlegung von kG in die prinzipalen unzerlegbaren Moduln, so folgt

$$kG/J(kG) = P_1/JP_1 \oplus \cdots \oplus P_m/JP_m$$

Dies impliziert $m = 1$ und damit ist kG unzerlegbar. ☐

Korollar 3.14. *Es sei G eine p-Gruppe mit $|G| = p^n$ und k sei ein Körper der Charakteristik p. Ist P ein projektiver kG-Modul, so ist P frei. Insbesondere ist* $\dim_k P$ *ein Vielfaches von p^n.*

Beweis. Es sei P ein projektiver Modul über kG. Dann ist P direkter Summand in einem freien Modul (also in mehreren Kopien von kG) und damit nach dem Satz von Krull-Remak-Schmidt (Satz 3.4) eine direkte Summe von prinzipalen unzerlegbaren Moduln. In unserem Fall ist P also eine direkte Summe von Kopien von kG, also frei. ☐

Wir werden weiter unten zeigen (Satz 3.17), dass auch die Umkehrung von Satz 3.12 gilt: G ist eine p-Gruppe genau dann, wenn k der einzige einfache kG-Modul ist, bzw. wenn kG unzerlegbar ist. Vorher betrachten wir aber noch kurz p'-Gruppen. Die Gruppe G heisst eine *p'-Gruppe*, wenn die Primzahl p die Gruppenordnung $|G|$ nicht teilt.

Satz 3.15. *Es seien k ein Körper der Charakteristik p und G eine p'-Gruppe. Dann ist kG halbeinfach.*

Beweis. Es ist zu zeigen, dass jeder Untermodul B eines kG-Moduls ein direktes Komplement besitzt. Sei also $B \subset A$ ein beliebiger Untermodul, A ein beliebiger kG-Modul. Wir wählen wir eine k-lineare Abbildung $f : A \to B$ mit $f\,|_B = 1_B$. Eine solche ergibt sich aus einer entsprechenden Basiswahl in A. Mit Hilfe von f definieren wir eine Abbildung $\varphi : A \to B$ durch

$$\varphi(a) := \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} x f(x^{-1} a).$$

Wir behaupten, dass φ ein kG-Modulhomomorphismus ist. In der Tat gilt

$$\begin{aligned} \varphi(ya) &= \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} x f(x^{-1} ya) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} y(y^{-1}x) f(x^{-1} ya) \\ &= y\varphi(a). \end{aligned}$$

Ausserdem folgt für $b \in B$ wegen $f(b) = b$ auch $\varphi(b) = b$.

Damit ist φ ein linksseitiges Inverses der Einbettung $B \subset A$. Setzen wir $C := \ker \varphi$, so folgt $A \cong B \oplus C$, B besitzt also ein Komplement. □

Aus diesem Resultat folgt, dass eine nicht-triviale p'-Gruppe nicht-triviale einfache kG-Moduln besitzt, d.h. einfache Moduln, die von k verschieden sind. Zerlegen wir nämlich kG in eine direkte Summe von einfachen Moduln, so muss unter diesen mindestens einer vorkommen, in dem die G-Operation nicht-trivial ist. Sonst wäre die G-Operation in kG ebenfalls trivial.

Für die nächsten zwei Sätze - beides wichtige Folgerungen aus obigem Resultat - benötigen wir das folgende Lemma.

Lemma 3.16. *Es sei U eine Untergruppe von G. Dann ist kG, aufgefasst als kU-Modul, frei.*

Beweis. Es sei $G = \cup_{i=1}^m U z_i$ eine Zerlegung von G in disjunkte U-Nebenklassen. Für kG, aufgefasst als kU-Modul, gilt dann

$$kG = \oplus_{i=1}^m (kU) z_i$$

Damit ist $z_1, \ldots, z_m$ eine kU-Basis von kG. □

Nun die Umkehrung des Satzes 3.12 über p-Gruppen:

Satz 3.17. *Es sei k ein Körper der Charakteristik p. G ist eine p-Gruppe genau dann, wenn k der einzige einfache kG-Modul ist.*

Beweis. Es bleibt zu zeigen, dass es ausser k noch weitere einfache kG-Moduln gibt, falls G keine p-Gruppe ist. Wenn aber G keine p-Gruppe ist, gibt es neben p eine Primzahl q, $q \neq p$, die ein Teiler von $|G|$ ist. Nach dem Satz von Cauchy[2] gibt es dann in G ein

---

[2] Es sei G eine endliche Gruppe und p sei eine Primzahl, welche die Ordnung von G teilt. Dann gibt es in G ein Element der Ordnung p.

Element $e \neq y$ der Ordnung q. Es bezeichne C die zyklische Untergruppe von G, die von y erzeugt wird. Wir betrachten nun kG als kC-Modul: nach Lemma 3.16 ist kG frei über kC. Ferner haben wir bei Satz 3.15 gesehen, dass kC nicht-triviale einfache kC-Moduln als direkte Summanden enthält. Unter den kC-Kompositionsfaktoren von kG gibt es also nicht-triviale. Natürlich erhalten wir die kC-Kompositionsfaktoren von kG auch, indem wir zuerst die kG-Kompositionsfaktoren von kG betrachten, und diese dann auf kC einschränken. Wir sehen also, dass sich unter den kG-Kompositionsfaktoren von kG solche befinden müssen, in denen kC nicht-trivial operiert. Dies war zu beweisen. ☐

[Satz 3.18 in Vorlesung ausgelassen]

Der letzte Satz dieses Abschnittes liefert eine überraschende Information über die Dimension der prinzipalen unzerlegbaren Moduln.

Satz 3.18. *Es sei p eine Primzahl, k ein Körper der Charakteristik p und G eine Gruppe der Ordnung $p^n q$ mit p und q teilerfremd. Ist P ein prinzipaler unzerlegbarer kG-Modul, so ist $\dim_k P$ ein Vielfaches von p^n.*

Beweis. Es sei S eine p-Sylowuntergruppe von G: ihre Ordnung ist gerade p^n. Ist nun P ein prinzipaler unzerlegbarer kG-Modul, so existiert ein kG-Modul Q mit $P \oplus Q = kG$. Als kG-Modul ist also P ein direkter Summand des freien kS-Moduls kG. Als kS-Modul ist deshalb P ebenfalls projektiv, und da S eine p-Gruppe ist, ist P eine direkte Summe von Kopien von kS. Die k-Dimension von P ist also ein Vielfaches von der Ordnung von S, d.h. von p^n. ☐

[Die Unterkapitel 3.4-3.7 werden in der Vorlesung im Sommersemester 2014 ausgelassen, es geht jetzt direkt mit Kapitel 4 weiter. Ein paar Resultate von 3.4-3.7 werden wir brauchen, das sind die folgenden, in der Reihenfolge des Auftretens ab Kapitel 4:]

Korollar 3.26
Korollar 3.20
Satz 3.22
Satz 3.28
Korollar 3.21

[Dabei geht es in den Korollaren 3.20 und 3.21 sowie in Satz 3.22 um den dualen kG-Modul zu einem kG-Modul A, definiert als $A^* = \mathrm{Hom}_k(A, k)$, die beiden Korollare beinhalten Isomorphismen $\mathrm{Hom}_{kG}(A, B) \cong \mathrm{Hom}_{kG}(B^*, A^*)$ und $\mathrm{Ext}^n_{kG}(A, B) \cong \mathrm{Ext}^n_{kG}(B^*, A^*)$ für beliebige $n > 0$, Satz 3.22 zeigt, dass die Moduln kG und kG^* isomorph sind. Korollar 3.26 sagt aus, dass jeder projektive kG-Modul auch injektiv ist, d.h. die Begriffe *projektiv* und *injektiv* sind für kG gleichbedeutend. Satz 3.28 verbindet kU-Moduln mit kG-Moduln für $U \leq G$ eine Untergruppe. Das ist die sogenannte Frobenius-Reziprozität $\mathrm{Hom}_{kU}(B, A{\downarrow_U}) \cong \mathrm{Hom}_{kG}(B{\uparrow^G}, A)$ für A ein kG-Modul und B ein kU-Modul].

3.4 Der duale Modul

Es seien A und B zwei kG-Moduln. Zwei Beispiele von kG-Moduln sind:

(1) Das Tensorprodukt $A \otimes_k B$ wird durch

$$x(a \otimes b) = xa \otimes xb,\ a \in A,\ b \in B,\ x \in G$$

zum kG-Modul (mit der diagonalen Operation).

(2) Eie Homomorphismengruppe $\mathrm{Hom}_k(A, B)$ wird durch

$$(xf)(a) = x(f(x^{-1}a)),\ a \in A,\ x \in G,\ f : A \to B$$

zu einem kG-Modul. In beiden Fällen sprechen wir von der *diagonalen Operation von* G. Wir werden im Folgenden mit "$A \otimes_k B$" und "$\mathrm{Hom}_k(A, B)$" diese kG-Moduln meinen.
Insbesondere:
Der *zu* A *duale Modul* A^* ist definiert durch $A^* = \mathrm{Hom}_k(A, k)$. Die kG-Operation in A^* ist gegegeben durch

$$(xf)a = xf(x^{-1}a),\ a \in A, x \in G,\ f : A \to k\,.$$

Diese Operation heisst die *kontragrediente Operation.* Es ist $A^{**} = A$.
Ausserdem hat man:

- $A \otimes_k k \cong A \cong k \otimes_k A$,
- $\mathrm{Hom}_k(k, B) = B$
- $A \otimes_k B \cong B \otimes_k A$.

Für den dualen Modul gelten folgende Aussagen:

(a) Die Folge $0 \to A_1 \to A_2 \to A_3 \to 0$ ist genau dann exakt, wenn die duale Folge $0 \to A_3^* \to A_2^* \to A_1^* \to 0$ exakt ist. Sind die beiden Folgen exakt, so zerfällt die eine genau dann, wenn die andere zerfällt.

(b) Der Modul A^* ist genau dann einfach, wenn A einfach ist.

(c) Der Modul A ist genau dann unzerlegbar, wenn A^* unzerlegbar ist.

Es gilt folgender grundlegender Satz:

Satz 3.19. *Es seien A, B, C drei kG-Moduln. Dann ist die Abbildung*

$$\Phi : \mathrm{Hom}_{kG}(A, \mathrm{Hom}_k(B, C)) \to \mathrm{Hom}_{kG}(A \otimes_k B, C)$$

definiert durch

$$(\Phi\varphi)(a \otimes b) = (\varphi(a))(b), \quad a \in A, \quad b \in B, \quad \varphi : A \to \mathrm{Hom}_k(B, C)$$

ein natürlicher Isomorphismus.

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass $\Phi\varphi : A \otimes_k B \to C$ ein kG-Modulhomomorphismus ist:

$$\begin{aligned}(\Phi\varphi)(x(a\otimes b)) &= (\Phi\varphi)(xa \otimes xb)\\ &= (\varphi(xa))(xb)\\ &= (x(\varphi(a))(xb)\\ &= x((\varphi(a))(x^{-1}xb))\\ &= x((\varphi(a))(b))\\ &= x((\Phi\varphi)(a\otimes b))\end{aligned}$$

Um zu zeigen, dass Φ ein Isomorphismus ist, geben wir das Inverse Ψ an. Dieses ist definiert durch

$$[(\Psi g)(a)]\,(b) = g(a\otimes b), \quad a \in A, \quad b \in B, \quad g : A \otimes_k B \to C.$$

Man soll die Gleichungen $\Psi\Phi = 1$ und $\Phi\Psi = 1$ nachprüfen. Damit ist Φ ein Isomorphismus. ☐

3.4.1 Einschub zur natürlichen Isomorphie

Zur Erinnerung: um zu zeigen, dass zwei Funktoren $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ natürlich isomorph sind, muss man eine Abbildung $\varphi : F \xrightarrow{\sim} G$ finden, so dass für alle $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ und für alle $A \overset{a}{\to} A'$ die Quadrate

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "\varphi_A"] \arrow[d, "F(a)"'] & G(A) \arrow[d, "G(a)"] \\ F(A') \arrow[r, "\varphi_{A'}"'] & G(A') \end{tikzcd}$$

kommutieren.

Zur Abkürzung sei $\mathbf{M}$ die Kategorie kG-**Mod** der kG-Moduln. Sei k-**VR** die Kategorie der k-Vektorräume. Im Kontext des obigen Satzes ist dann $F = \mathrm{Hom}_{kG}(A, \mathrm{Hom}_k(B, C))$ ein Funktor von $\mathbf{M}^{\mathrm{opp}} \times \mathbf{M}^{\mathrm{opp}} \times \mathbf{M} \to k\text{-}\mathbf{VR}$ (denn die drei Moduln A, B und C werden auf die Homomorphismen von A nach $\mathrm{Hom}_k(B, C)$ abgebildet). Und $G = \mathrm{Hom}_{kG}(A \otimes B, C)$ ist ebenfalls ein Funktor von $\mathbf{M}^{\mathrm{opp}} \times \mathbf{M}^{\mathrm{opp}} \times \mathbf{M} \to k\text{-}\mathbf{VR}$.

Die Diagramme, die man dann auf Kommutativität überprüfen muss, sind

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{kG}(A, \mathrm{Hom}_k(B, C)) \arrow[r, "\varphi_{A,B,C}"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{kG}(a,\mathrm{Hom}_k(b,c))"'] & \mathrm{Hom}_{kG}(A \otimes B, C) \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{kG}(a\otimes b,c)"] \\ \mathrm{Hom}_{kG}(A', \mathrm{Hom}_k(B', C')) \arrow[r, "\varphi_{A',B',C'}"'] & \mathrm{Hom}_{kG}(A' \otimes B', C') \end{tikzcd}$$

für jedes Tripel (A, B, C) in $\mathrm{Ob}(\mathbf{M}^{\mathrm{opp}} \times \mathbf{M}^{\mathrm{opp}} \times \mathbf{M})$
und jedes Tripel
$(A, B, C) \xrightarrow{(a,b,c)} (A', B', C') \in \mathrm{Hom}_{kG}(\mathbf{M}^{\mathrm{opp}} \times \mathbf{M}^{\mathrm{opp}} \times \mathbf{M}, \mathbf{M}^{\mathrm{opp}} \times \mathbf{M}^{\mathrm{opp}} \times \mathbf{M})$, $A' \overset{a}{\to} A$, $B' \overset{b}{\to} B$, $C \overset{c}{\to} C'$ von Abbildungen.

3.4.2 Zurück zu den dualen Moduln

Aus Satz 3.19 können wir einige Resultate folgern:

Korollar 3.20. *Für kG-Moduln A und B gelten natürliche Isomorphismen*

$$\mathrm{Hom}_{kG}(A,B) \cong \mathrm{Hom}_{kG}(k, \mathrm{Hom}_k(A,B)) \cong \mathrm{Hom}_{kG}(A \otimes_k B^*, k) \cong \mathrm{Hom}_{kG}(B^*, A^*)$$

Beweis. Wir erhalten der Reihe nach

$$\begin{gathered}\mathrm{Hom}_{kG}(A,B) \cong \mathrm{Hom}_{kG}(k \otimes_k A, B) \cong \mathrm{Hom}_{kG}(k, \mathrm{Hom}_k(A,B)) \\ \mathrm{Hom}_{kG}(A,B) \cong \mathrm{Hom}_{kG}(A, B^{**}) \cong \mathrm{Hom}_{kG}(A, \mathrm{Hom}_k(B^*, k)) \cong \mathrm{Hom}_{kG}(A \otimes_k B^*, k) \\ \mathrm{Hom}_{kG}(A \otimes_k B^*, k) \cong \mathrm{Hom}_{kG}(B^* \otimes_k A, k) \cong \mathrm{Hom}_{kG}(B^*, \mathrm{Hom}_k(A,k)) \cong \mathrm{Hom}_{kG}(B^*, A^*)\end{gathered}$$

□

Eine analoge Aussage gilt dann auch für $\mathrm{Ext}^*_{kG}(-,-)$ (wobei $*$ für eine Zahl $n = 1, 2, \ldots$ steht) anstelle von $\mathrm{Hom}_{kG}(-,-)$.

Korollar 3.21. *Für kG-Moduln A und B gelten natürliche Isomorphismen*

$$\mathrm{Ext}^*_{kG}(A,B) \cong \mathrm{Ext}^*_{kG}(k, \mathrm{Hom}_k(A,B)) \cong \mathrm{Ext}^*_{kG}(A \otimes_k B^*, k) \cong \mathrm{Ext}^*_{kG}(B^*, A^*)$$

Beweis. Es sei

$$P \quad : \cdots \to P_n \to P_{n-1} \to \cdots \to P_1 \to P_0 \to 0$$

eine projektive Auflösung des kG-Modules k. Dann gilt nach Satz 3.19

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{kG}(P \otimes_k A, B) &\cong \mathrm{Hom}_{kG}(P, \mathrm{Hom}_k(A,B)) \\ &\cong \mathrm{Hom}_{kG}(P \otimes_k A \otimes_k B^*, k) \\ &\cong \mathrm{Hom}_{kG}(P \otimes_k B^*, A^*)\end{aligned}$$

Behauptung: Für einen projektiven kG-Modul Q und einen kG-Modul C ist das Tensorprodukt $Q \otimes_k C$ auch projektiv.

Damit wäre der Beweis des Korollars fertig, denn dann hat man das Resultat, indem man in den obigen Komplexen Homologie nimmt.
Beweis Behauptung: Man zeigt, dass der Funktor $\mathrm{Hom}_{kG}(Q \otimes_k C, -)$ exakt ist. Es sei also $0 \to B_1 \to B_2 \to B_3 \to 0$ eine exakte Folge. Da k ein Körper ist, ist die Folge

$$0 \to \mathrm{Hom}_k(C, B_1) \to \mathrm{Hom}_k(C, B_2) \to \mathrm{Hom}_k(C, B_3) \to 0$$

ebenfalls exakt. Unter $\mathrm{Hom}_{kG}(Q, -)$ erhält man die exakte Folge

$$0 \to \mathrm{Hom}_{kG}(Q, \mathrm{Hom}_k(C, B_1)) \to \mathrm{Hom}_{kG}(Q, \mathrm{Hom}_k(C, B_2)) \to \mathrm{Hom}_{kG}(Q, \mathrm{Hom}_k(C, B_3)) \to 0$$

(da Q projektiv ist). Nach Satz 3.19 stimmt diese Folge mit

$$0 \to \mathrm{Hom}_{kG}(Q \otimes_k C, B_1) \to \mathrm{Hom}_{kG}(Q \otimes_k C, B_2) \to \mathrm{Hom}_{kG}(Q \otimes_k C, B_3) \to 0$$

überein. Da diese exakt ist, ist die Behauptung bewiesen. □

Satz 3.22. *Die Abbildung* $\Psi : kG \to (kG)^*$ *definiert durch*

$$(\Psi(x))(y) = \begin{cases} 1 & \textit{falls } y = x \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases}$$

($x, y \in G$) ist ein Isomorphismus von kG-Moduln.

Beweis. Wir bemerken zuerst, dass Ψ der durch die Gruppenelemente gegebenen Basis des k-Vektorraums kG die dazu duale Basis zuordnet. Wegen der endlichen Dimension ist Ψ ein Isomorphismus (von k-Vektorräumen). Es bleibt somit nur zu zeigen, dass Ψ ein kG-Modulhomomorphismus ist:

$$(\Psi(zx))(y) = \delta_{zx,y} = \delta_{x,z^{-1}y} = (\Psi(x))(z^{-1}y) = (z(\Psi(x)))(y)$$

(wobei δ das Kronecker-Delta sei). ☐

Korollar 3.23. *Ist P ein prinzipaler unzerlegbarer kG-Modul, so ist auch P^* ein prinzipaler unzerlegbarer kG-Modul.*

Beweis. Gemäss Definition ist P ein unzerlegbarer direkter Summand von kG. Dann ist aber P^* ein unzerlegbarer direkter Summand von $(kG)^*$, also nach obigem Satz (Satz 3.22) von kG. ☐

Korollar 3.24. *Es sei P ein prinzipaler unzerlegbarer kG-Modul. Dann besitzt P nur einen einzigen einfachen Untermodul.*

Beweis. Es seien M_1 und M_2 zwei verschiedene einfache Untermoduln von P. Dann gibt es eine Einbettung $0 \to M_1 \oplus M_2 \to P$. Dies liefert eine Projektion $P^* \to M_1^* \oplus M_2^* \to 0$. Da P^* ein prinzipaler unzerlegbarer kG-Modul ist, und die Moduln M_i^* einfach sind, gibt dies einen Widerspruch. ☐

Definition. Der grösste halbeinfache Untermodul eines Moduls A heisst der *Sockel* von A.

Mit dem Begriff Sockel ausgedrückt sagt Korollar 3.24, dass der Sockel eines prinzipalen unzerlegbaren Moduls einfach ist. (Man kann zeigen, dass der Sockel und der Kopf eines prinzipalen unzerlegbaren Moduls zueinander isomorph sind).

Korollar 3.25. *Es sei P ein projektiver kG-Modul. Dann ist auch P^* projektiv.*

Beweis. P ist eine direkte Summe von prinzipalen unzerlegbaren kG-Moduln. Dann ist P^* die Summe der dazu dualen prinzipalen unzerlegbaren Moduln. Jeder einzelne davon ist wieder prinzipal unzerlegbar, also ist P^* als direkte Summe von projektiven Moduln selber projektiv. ☐

Korollar 3.26. *Es sei P ein projektiver kG-Modul. Dann ist für jede kurze exakte Folge $0 \to A_1 \to A_2 \to A_3 \to 0$ die induzierte Folge*

$$0 \to \mathrm{Hom}_{kG}(A_3, P) \to \mathrm{Hom}_{kG}(A_2, P) \to \mathrm{Hom}_{kG}(A_1, P) \to 0$$

exakt.

Beweis. Nach Korollar 3.25 ist P^* projektiv. Da die Folge

$$0 \to A_3^* \to A_2^* \to A_1^* \to 0$$

exakt ist, ist auch die induzierte Folge

$$0 \to \mathrm{Hom}_{kG}(P^*, A_3^*) \to \mathrm{Hom}_{kG}(P^*, A_2^*) \to \mathrm{Hom}_{kG}(P^*, A_1^*) \to 0$$

exakt. Sie wiederum stimmt überein mit der Folge

$$0 \to \mathrm{Hom}_{kG}(A_3, P) \to \mathrm{Hom}_{kG}(A_2, P) \to \mathrm{Hom}_{kG}(A_1, P) \to 0$$

☐

Zur Erinnerung: ein Λ-Modul I heisst *injektiv*, falls der Funktor $\mathrm{Hom}_\Lambda(-, I)$ exakt ist, d.h. wenn jede kurze exakte Folge $\to A_1 \to A_2 \to A_3 \to 0$ von Λ-Moduln in eine exakte Folge

$$0 \to \mathrm{Hom}_\Lambda(A_3, I) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(A_2, I) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(A_1, I) \to 0$$

übergeführt wird (d.h., wenn die Abbildung $\mathrm{Hom}_\Lambda(A_2, I) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(A_1, I)$ surjektiv ist - denn Hom_Λ ist ja links-exakt). Damit sagt das Korollar 3.26 aus, dass jeder projektive kG-Modul auch injektiv ist. Es gilt: Die Begriffe *projektiv* und *injektiv* sind für kG gleichbedeutend.

3.5 Restriktion und Induktion

Es sei U eine Untergruppe von G. In diesem Abschnitt geht es darum, aus kG-Moduln kU-Moduln zu erhalten und umgekehrt. Ein kG-Modul A kann als kU-Modul aufgefasst werden, indem man nur die Operation der Untergruppe U in A betrachtet. Meistens ist aus dem Zusammenhang klar, ob A als kG-Modul oder als Modul über kU aufgefasst wird. Manchmal muss man das aber explizit anzeigen. Dann schreiben wir $A{\downarrow_U}$. Der Übergang von A zu $A{\downarrow_U}$ heisst *Restriktion* (von G auf die Untergruppe U).

In der umgekehrten Richtung ordnet man dem kU-Modul B den kG-Modul $B{\uparrow^G}$ zu, dieser Übergang heisst *Induktion*, der induzierte Modul ist definiert durch

$$B{\uparrow^G} = kG \otimes_{kU} B$$

wobei für das Tensorprodukt kG als Rechtsmodul aufzufassen ist. Die kG-Operation in $B{\uparrow^G}$ ist durch die kG-Linksmodulstruktur von kG gegeben.

Lemma 3.27. *Ist $G = \bigcup_{i=1}^l y_i U_i$ eine disjunkte Zerlegung von G in U-Nebenklassen, so ist $B{\uparrow^G}$ als k-Vektorraum die direkte Summe $\bigoplus_{i=1}^l y_i \otimes B$.*

Beweis. Jedes Element $x \in G$ lässt sich in eindeutiger Weise als $y_i u$ schreiben für ein i in $\{1, 2 \ldots, l\}$ und ein $u \in U$. Indem man die Basis von kG entsprechend gruppiert, erhält man $kG = \bigoplus_{i=1}^l y_i kU$. Damit folgt $kG \otimes_{kU} B = \bigoplus_{i=1}^l y_i kU \otimes_{kU} B = \bigoplus_{i=}^l y_i \otimes B$. ☐

Zwischen Restriktion und Induktion besteht ein enger Zusammenhang, der im folgenden Satz beschrieben wird:

Satz 3.28 (Frobenius-Reziprozität)**.** *Es sei U eine Untergruppe von G, A ein kG-Modul und B ein kU-Modul. Dann gibt es einen natürlichen Isomorphismus*

$$\Phi : \mathrm{Hom}_{kU}(B, A{\downarrow_U}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{kG}(B{\uparrow^G}, A),$$

gegeben durch

$$(\Phi(\beta))(x \otimes b) = x(\beta(b)), \quad x \in G, \quad b \in B, \quad \beta : B \to A{\downarrow_U}\,.$$

Beweis. Wir definieren hier die Umkehrabbildung Ψ. Für $\alpha : B{\uparrow^G} \to A$ und $b \in B$ ist $\Psi(\alpha) : B \to A{\downarrow_U}$ definiert durch

$$(\Psi(\alpha))(b) = \alpha(1_G \otimes b)\,.$$

Man soll den Rest nachprüfen: dass $\Psi(\beta)$ ein kG-Modulhomomorphismus ist und dass sowohl $\Psi\Phi = 1_{\mathrm{Hom}_{kU}(B,A\downarrow_U)}$ als auch $\Phi\Psi = 1_{\mathrm{Hom}_{kG}(B\uparrow^G,A)}$ gelten. Ausserdem die Natürlichkeit des Isomorphismus Φ. ☐

In der Sprache der Kategorientheorie besagt, dass der Funktor $B \rightsquigarrow B{\uparrow^G}$ linksadjungiert ist zum sogenannten "Vergissfunktor" (forgetful functor) $A \rightsquigarrow A{\downarrow_U}$.

3.5.1 Einschub zu adjungierten Funktoren

Zwei Funktoren $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ und $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ zwischen zwei Kategorien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ bilden ein Paar *adjungierter Funktoren*, wenn die Funktoren

$$(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, GY)$$

und

$$(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(FX, Y)$$

von $\mathcal{C}^{\mathrm{opp}} \times \mathcal{D}$ nach **Set** natürlich äquivalent sind. (Die natürliche Äquivalenz ist Bestandteil der Struktur "adjungiertes Funktorpaar"). F heisst dann *linksadjungiert zu* G (und G heisst *rechtsadjungiert zu* F).

Bemerkung. Rechtsadjungierte additive Funktoren sind links-exakt, linksadjugierte additive Funktoren sind rechts-exakt.

Beispiel. Sei G der Funktor $\mathbf{Ab} \to \Lambda\text{-}\mathbf{Mod}$, der durch

$$C \mapsto GC := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Lambda, C)$$

definiert ist. Die links-Λ-Modulstruktur in GC ist durch die rechts-Λ-Modulstruktur von Λ gegeben. Und F sei der unterliegende Funktor $\Lambda\text{-}\mathbf{Mod} \to \mathbf{Ab}$, der Vergissfunktor, i.e.

der Funktor, der die Λ-Modulstruktur vergisst. Dann gibt es eine natürliche Äquivalenz (nach Proposition I.8.1 in [HS])

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(A, GC) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(FA, C)$$

für $A \in \Lambda$-**Mod** und $C \in$ **Ab**.

F ist links-adjungiert zu G.

3.5.2 Zurück zu Induktion-Restriktion

Die Frobenius-Reziprozität (Satz 3.28) impliziert ein analoges Resultat für die Ext-Gruppen.

Satz 3.29. *Es sei U eine Untergruppe von G, sei A ein kG-Modul und B ein kU-Modul. Dann gibt es einen natürlichen Isomorphismus*

$$\Psi : \mathrm{Ext}^*_{kU}(B, A{\downarrow}_U) \overset{\sim}{\to} \mathrm{Ext}^*_{kG}(B{\uparrow}^G, A).$$

Beweis. Um den Isomorphismus zu erhalten, wähle man eine kU-projektive Resolution P von B, bilde den Komplex $\mathrm{Hom}_{kU}(P, A{\downarrow}_U)$ und wende auf die einzelnen Gruppen den Homomorphismus Φ des Satzes 3.28 an. Der Komplex $P{\uparrow}^G = \{kG \otimes_{kU} P_n\}$ ist eine projektive Resolution von $kG \otimes_{kU} B$. Wir erhalten als Homologie von $\mathrm{Hom}_{kU}(P, A{\downarrow}_U)$ die Ext-Gruppen auf der linken Seite und als Homologie von $\mathrm{Hom}_{kG}(P{\uparrow}^G, A)$ die Ext-Gruppen auf der rechten Seite. ☐

Für den Rest von Abschnitt 3.5 betrachten wir den Fall, wo die Untergruppe von G ein Normalteiler ist, welcher mit N bezeichnet wird.

Lemma 3.30. *Sei N ein Normalteiler von G und B ein kN-Modul. Für jedes $y \in G$ ist*

$$y \otimes B := \{y \otimes b \mid b \in B\} \;\subset\; B{\uparrow}^G$$

ein kN-Untermodul von $B{\uparrow}^G{\downarrow}_N$.

Der kN-Untermodul $y \otimes B$ heisst der *unter $y \in G$ zu B konjugierte Modul.*

Beweis. Es sei $u \in N$. Dann gilt unter Berücksichtigung der kG-Modulstruktur von $B{\uparrow}^G$ für $b \in B$

$$u(y \otimes b) = y(y^{-1}uy) \otimes b = y \otimes (y^{-1}uy)b\,.$$

Der k-Unterraum $y \otimes B$ von $B{\uparrow}^G$ ist somit unter der kN-Operation stabil. ☐

Zusammen mit den Lemmata 3.27 und 3.30 erhalten wir folgendes Resultat:

Lemma 3.31. *Es sei N ein Normalteiler von G, B ein kN-Modul und $G = \cup_{i=1}^l y_i N$ eine Zerlegung von G in N-Nebenklassen. Dann gilt*

$$B{\uparrow}^G{\downarrow}_N = \bigoplus_{i=1}^{l} y_i \otimes B.$$

Damit können wir den Satz von Clifford beweisen, welcher eine Aussage über die Restriktion von einfachen Moduln auf Normalteiler beinhaltet.

Satz 3.32 (Satz von Clifford). *Es sei N ein Normalteiler von G und A ein einfacher kG-Modul. Dann ist $A{\downarrow_N}$ halbeinfach und es gilt*

$$A{\downarrow_N} = \bigoplus_{i=1}^{l} B_i$$

wo B_i, $i = 1, 2, \ldots, l$ zueinander konjugierte einfache kN-Moduln sind.

Beweis. Es sei B_0 ein einfacher kN-Untermodul von $A{\downarrow_N}$. Wir betrachten $B_0{\uparrow^G}$. Ist $G = \bigcup_{i=1}^{l} y_i N$ eine Zerlegung von G in N-Nebenklassen, so ist nach dem Lemma 3.31

$$B_0{\uparrow^G}{\downarrow_N} = \bigoplus_{i=1}^{l} y_i \otimes B_0.$$

Da B_0 einfach ist, ist auch jeder zu B_0 konjugierte Modul einfach, also ist $B_0{\uparrow^G}{\downarrow_B}$ halbeinfach. Der Satz 3.28 liefert den k-Vektorraumisomorphismus

$$\Psi : \mathrm{Hom}_{kN}(B_0, A{\downarrow_N}) \to \mathrm{Hom}_{kG}(B_0{\uparrow^G}, A).$$

Der Einbettung $B_0 \subset A{\downarrow_N}$ entspricht unter Ψ somit eine nicht-triviale Abbildung $\beta : B_0{\uparrow^G} \to A$. Da A einfach ist, muss β surjektiv sein. Dies bedeutet, dass $A{\downarrow_N}$ ein Quotient des halbeinfachen Moduls $B_0{\uparrow^G}{\downarrow_N}$ ist, also selber halbeinfach ist. Ausserdem können als direkte Summanden von $A{\downarrow_N}$ nur direkte Summanden von $B_0{\uparrow^G}{\downarrow_N}$ auftreten, also zu B_0 konjugierte kN-Moduln. □

Für die Anwendungen wollen wir jetzt spezielle Normalteiler der Gruppe G ansehen. Diese spielen in der modularen Darstellungstheorie eine besondere Rolle.

Ist G eine Gruppe und p eine Primzahl, so nennen wir den Normalteiler N von G einen *p-Normalteiler*, wenn N eine p-Gruppe ist. Sind N und N' zwei p-Normalteiler von G, so ist auch NN' ein p-Normalteiler von G. Mit $|N|$ und $|N'|$ ist also auch $|NN'|$ eine p-Potenz. Der grösste p-Normalteiler von G, d.h. das Produkt aller p-Normalteiler von G wird mit O_pG bezeichnet.

Dies lässt sich iterieren. Zum Beispiel ist $O_{p'p}G$ definiert durch die Gleichung

$$O_{p'p}G/O_{p'}G = O_p(G/O_{p'}G).$$

Eine Anwendung ist der folgende Satz.

Satz 3.33. *Es sei A ein einfacher kG-Modul. Dann operiert O_pG trivial in A.*

Beweis. Setze $N = O_pG$. Dann ist $A{\downarrow_N}$ nach dem Satz von Clifford (Satz 3.32) halbeinfach. Da N eine p-Gruppe ist, muss $A{\downarrow_N}$ eine direkte Summe von Kopien des trivialen Moduls k sein. Insbesondere ist $A{\downarrow_N}$ ein trivialer kN-Modul. Das bedeutet, dass N trivial in A operiert. □

Nun kommen noch einige Zusätze, welche die Resultate aus Abschnitt 3.5 in einen allgemeineren Zusammenhang stellen.

Satz 3.34. *Es sei U eine Untergruppe von G, A ein kG-Modul und B ein kU-Modul. Dann gibt es einen natürlichen Isomorphismus*

$$\Phi : \mathrm{Hom}_{kU}(A{\downarrow_U}, B) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{kG}(A, \mathrm{Hom}_{kU}(kG, B))$$

gegeben durch

$$[(\Phi(\alpha))(a)](x) = \alpha(xa)$$

Vor dem Beweis eine Bemerkung zu $\mathrm{Hom}_{kU}(kG, B)$. Dies kann als kG-Modul aufgefasst werden, indem man die Operation von G wie folgt definiert:

$$(g\beta)(x) := \beta(xg)$$

für einen kU-Modulhomomorphismus $\beta : kG \to B$, $x \in G$ und $g \in G$.

Beweis. Zuerst überprüft man, dass $\Phi(\alpha)$ ein kG-Modulhomomorphismus ist: für $g \in G$ ist

$$\begin{aligned} [\Phi(\alpha)(ga)](x) &= \alpha(xga) \\ g[\Phi(\alpha)(a)](x) &= \Phi(\alpha)(a)(xg) = \alpha(xga). \end{aligned}$$

Wie im Beweis von Satz 3.28 geben wir die inverse Abbildung an, die Details sollen selber geprüft werden. Für $\beta : A \to \mathrm{Hom}_{kU}(kG, B)$ und $a \in A$ ist Ψ definiert durch $(\Psi(\beta))(a) := (\beta(a))(1_G)$. Es gilt dann $\Psi\Phi = 1$ und $\Phi\Psi = 1$. □

Man kann nachprüfen, dass der Funktor $F : B \rightsquigarrow \mathrm{Hom}_{kU}(kG, B)$ rechts-adjungiert ist zum Vergissfunktor $G : A \rightsquigarrow A{\downarrow_U}$: F ist ein Funktor von kU-**mod** nach den kG-**mod**. und G ein Funktor kG-**mod** $\to$ kU-**mod**. Dass die Funktoren adjungiert sind, heisst, dass es eine natürliche Äquivalenz gibt zwischen den beiden Funktoren

$$\begin{array}{rccl} & (A, B) & \rightsquigarrow & \mathrm{Hom}_{kU}(A{\downarrow}, B) = \mathrm{Hom}_{kU}(G(A), B) \\ \text{und} & (A, B) & \rightsquigarrow & \mathrm{Hom}_{kG}(A, \mathrm{Hom}_{kU}(kG, B)) = \mathrm{Hom}_{kG}(A, F(B)) \end{array}$$

(die beide von kG-$\mathbf{mod}^{\mathrm{opp}} \times kU$-**mod** nach **Sets** gehen). Man sieht dann, dass F rechts-adjungiert zu G ist.

Wie weiter oben impliziert dieser Satz ein Resultat für die Ext-Gruppen:

Satz 3.35. *Es sei U eine Untergruppe von G, A ein kG-Modul und B ein kU-Modul. Dann gibt es einen natürlichen Isomorphismus*

$$\mathrm{Ext}^*_{kU}(A{\downarrow_U}, B) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^*_{kG}(A, \mathrm{Hom}_{kU}(kG, B)).$$

Beweis. Um die rechte Seite zu berechnen, wählt man eine kG-projektive Resolution P von A, bildet man den Komplex $\mathrm{Hom}_{kG}(P, \mathrm{Hom}_{kU}(kG, B))$ und berechnet die Homologie. Gemäss Satz 3.34 gilt $\mathrm{Hom}_{kG}(P, \mathrm{Hom}_{kU}(kG, B)) = \mathrm{Hom}_{kU}(P{\downarrow_U}, B)$. Da $P{\downarrow_U}$ auch eine kU-projektive Resolution von $A{\downarrow_U}$ ist, folgt die Behauptung. ☐

Die beiden obigen Sätze, lassen sich nicht nur für die Gruppenalgebra kG einer Gruppe G und die Gruppenalgebra kU einer Unteralgebra beweisen, sondern in einem viel allgemeineren Zusammenhang, nämlich für einen Ring Λ und einen Unterring Λ' (unter gewissen Bedingungen). Dies kann man in Büchern über homologische Algebra finden. Das folgende Resultat ist jedoch stark von den ganz speziellen Eigenschaften der Gruppenalgebren abhängig.

Satz 3.36. *Es sei U eine Untergruppe von G, B ein kU-Modul. Dann gibt es einen natürlichen Isomorphismus*

$$\Phi : \mathrm{Hom}_{kU}(kG, B) \xrightarrow{\sim} kG \otimes_{kU} B$$

definiert durch

$$\Phi(\varphi) = \sum_{x \in G} x^{-1} \otimes \varphi(x).$$

Beweis. Wir beschränken uns hier auf knappe Hinweise.
Es ist zu zeigen, dass Φ wohldefiniert ist. Die Dimensionen der Vektorräumen auf beiden Seiten stimmen überein, es ist also zu prüfen, dass kein nicht-triviales φ in Null übergeht und dass Φ ein Homomorphismus von kG-Moduln ist.
Ausserdem muss die Natürlichkeit gezeigt werden. ☐

Obiger Satz (Satz 3.36) sagt, dass in diesem Fall die beiden zum Vergissfunktor $B \rightsquigarrow B{\downarrow_U}$ links- und rechtsadjungierten Funktoren natürlich äquivalent sind.

Satz 3.37. *Es sei U eine Untergruppe von G und B ein kU-Modul. Dann sind die kG-Moduln $\mathrm{Hom}_{kU}(kG, B^*)$ und $(kG \otimes_{kU} B)^*$ zueinander isomorph.*

Beweis. Für einen beliebigen kG-Modul A haben wir den Isomorphismus

$$\mathrm{Hom}_{kU}(B, A{\downarrow_U}) \cong \mathrm{Hom}_{kG}(kG \otimes_{kU} B, A)$$

(nach Satz 3.28). Ausserdem gibt es die Isomorphismen

$$\mathrm{Hom}_{kU}(B, A{\downarrow_U}) \cong \mathrm{Hom}_{kU}((A{\downarrow_U})^*, B^*) \cong \mathrm{Hom}_{kU}((A^*){\downarrow_U}, B^*) \cong \mathrm{Hom}_{kG}(A^*, \mathrm{Hom}_{kU}(kG, B^*))$$

(nach Korollar 3.20 und Satz 3.34). Und dann folgt mit Satz 3.36, wiederum mit Korollar 3.20

$$\mathrm{Hom}_{kG}(A^*, (kG \otimes_{kU} B)^*)) \cong \mathrm{Hom}_{kG}(A^*, \mathrm{Hom}_{kU}(kG, B^*))$$

wählt man $A^* = kG$, so hat man die Behauptung. ☐

3.6 Normalteiler und Blockzugehörigkeit

Es sei N ein Normalteiler von G und Q die zugehörige Faktorgruppe G/N. Ist A ein kQ-Modul, so kann offensichtlich A auch als kG-Modul aufgefasst werden: ein Element $x \in G$ operiert in A wie sein Bild in Q in A operiert. Ist A als kQ-Modul einfach, so ist A auch als kG-Modul einfach. Ist umgekehrt B ein kG-Modul, in dem die Elemente von N trivial, d.h. als Identität, operieren, so kann B offensichtlich als kQ-Modul aufgefasst werden. Wiederum gilt, dass, wenn B als kG-Modul einfach ist, dann ist B auch als kQ-Modul einfach. Unser erster Satz gibt ein Resultat über die Blockzugehörigkeit dieser Moduln.

Satz 3.38. *Es seien A und B zwei einfache kQ-Modul, die zum selben Block von kQ gehören. Dann liegen A und B auch im selben Block von kG.*

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass $\mathrm{Ext}^1_{kQ}(A,B) \neq 0$ immer $\mathrm{Ext}^1_{kG}(A,B) \neq 0$ impliziert. Dies ist aber klar, wenn man mit Erweiterungen arbeitet. Ist $0 \to B \to E \to A \to 0$ eine (nichtzerfallende) Erweiterung von kQ-Moduln, so kann sie auch als (nichtzerfallende) Erweiterung von kG-Moduln aufgefasst werden. Da die Blockzugehörigkeit via Erweiterungen definiert ist, beweist diese Überlegung die Behauptung. ☐

Die Überlegung vom Beweis liefert für beliebige kQ-Moduln A und B eine injektive Abbildung

$$\mathrm{Ext}^1_{kQ}(A,B) \to \mathrm{Ext}^1_{kG}(A,B)$$

Wir werden über diese Abbildung eine stärkere Aussage herleiten (in etwas allgemeinerem Rahmen). Insbesondere werden wir sehen, wann sie surjektiv ist. Dazu benötigen wir einige Vorbereitungen und neue Notationen.

Es sei A ein kG-Modul. Wir betrachten die Elemente von A, die unter der Operation des Normalteilers N festgehalten werden:

$$A^N = \{a \in A \mid xa = a \text{ für alle } x \in N\}$$

Die Menge der N-Fixpunkte A^N hat folgende Eigenschaften:

Lemma 3.39. *Für einen kG-Modul A gelten die folgenden Aussagen:*

- *(a) A^N ist ein kG-Untermodul von A, in dem N trivial operiert. Insbesondere ist A^N ein kQ-Modul.*
- *(b) N operiert trivial in $A \iff A^N = A$.*
- *(c) $A^N = \mathrm{Hom}_{kN}(k, A)$.*

Beweis. ad (a):
A^N ist offensichtlich ein k-Unterraum von A, in dem N nach Definition trivial operiert. Für $g \in G$ und $u \in N$ gilt, für alle $a \in A^N$:

$$u(ga) = g(g^{-1}ug)a = ga,$$

da $g^{-1}ug \in N$ trivial in A^N operiert. Damit ist A^N ein kG-Untermodul von A (denn mit $a \in A^N$ ist auch ga ein Element in A^N, da $u(ga) = ga$ ist).
ad (b): Dies ist klar.
ad (c):
Dem Element $a \in A^N$ ordnen wir den Homomorphismus $\varphi : k \to A$ zu, der definiert wird durch $\varphi(1) = a$. Da a unter N fix bleibt, ist φ ein kN-Modulhomomorphismus. Umgekehrt ordnen wir dem kN-Modulhomomorphismus $\varphi : k \to A$ das Element $a = \varphi(1)$ zu. Es gilt für $u \in N$

$$a = \varphi(1) = \varphi(u1) = u\varphi(1) = ua,$$

so dass a unter der Operation von N fix bleibt, i.e. $a \in A^N$. Die Zusammensetzung der beiden so definierten Abbildungen sind jeweils die Identität. Damit ist (c) bewiesen. ☐

Lemma 3.40. *Sei A ein einfacher kG-Modul. Dann gilt $A^N = 0$ oder N operiert trivial in A.*

Beweis. Da A^N ein $kG-$Untermodul von A ist und A einfach ist, ist entweder $A^N = 0$ oder $A^N = A$. Im zweiten Fall operiert N trivial in A. ☐

Theorem 3.41. *Es sei N ein Normalteiler von G und A ein kG-Modul. Dann ist die folgende Sequenz exakt:*

$$0 \to \operatorname{Ext}^1_{kQ}(k, A^N) \to \operatorname{Ext}^1_{kG}(k, A) \to \operatorname{Ext}^1_{kN}(k, A{\downarrow_N}).$$

Für den Beweis dieses wichtigen Resultates benötigen wir zuerst noch zwei Lemmata.

Lemma 3.42. *Es sei A ein kG-Modul und B ein kQ-Modul. Dann gilt*

$$\operatorname{Hom}_{kQ}(B, A^N) = \operatorname{Hom}_{kG}(B, A).$$

Beweis. Jeder kQ-Modulhomomorphismus $\beta : B \to A^N$ gibt Anlass zu einem kG-Modulhomomorphismus $\alpha : B \to A^N \to A$, also ist $\operatorname{Hom}_{kQ}(B, A^N) \subset \operatorname{Hom}_{kG}(B, A)$.

Somit bleibt zu zeigen, dass jeder kG-Modulhomomorphismus $\alpha : B \to A$ über A^N faktorisiert. Dies ist klar, da die Elemente von N in B und deshalb auch im Bild trivial operieren. ☐

Lemma 3.43. *Es gilt $kG \otimes_{kN} k \cong kQ$ als kG-Moduln.*

Beweis. Es sei $\pi : G \to Q$ die kanonische Projektion. Wir definieren eine Abbildung $\sigma : kG \otimes_{kN} k \to kQ$ durch $\sigma(g \otimes a) = \pi(g)$, $g \in G$, $a \in k$. Diese Abbildung ist wohldefiniert, surjektiv, und ein kG-Modulhomomorphismus. Da nach Lemma 3.16 die k-Dimension von $kG \otimes_{kN} k$ gleich der Ordnung von Q ist, ist σ ein Isomorphismus. ☐

Nun kommen wir zum Beweis des Theorems. Wir betrachten die sogenannte *Augmentierungsabbildung $\varepsilon : kQ \to k$ der Gruppenalgebra kQ*, es ist dies der Algebrenhomomorphismus, der durch $\varepsilon(g) = 1$, $g \in G$, definiert wird. Der Kern $IQ = \ker \varepsilon$ heisst auch das *Augmentierungsideal von kQ*. Es ist ein kQ-Untermodul der Kodimension 1 in kQ.

Beweis von Theorem 3.41. Das Augmentierungsideal IQ ist ein kQ-Untermodul der Kodimension 1 in kQ. Damit erhalten wir eine kurze exakte Folgen von kQ-Moduln

$$0 \to IQ \to kQ \to k \to 0$$

Auf diese wenden wir einmal den Funktor $\mathrm{Hom}_{kQ}(-, A^N)$ an. Ausserdem fassen wir die Sequenz als kurze exakte Folge von kG-Moduln auf und wenden $\mathrm{Hom}_{kG}(-, A)$ darauf an. Damit erhalten wir das folgende Diagramm (die senkrechten Isomorphismen sind nach Lemma 3.42 gegeben):

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{kQ}(k, A^N) \arrow[r, hook] \arrow[d, equal] & \mathrm{Hom}_{kQ}(kQ, A^N) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathrm{Hom}_{kQ}(IQ, A^N) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathrm{Ext}^1_{kQ}(k, A^N) \arrow[r] & 0 \\
\mathrm{Hom}_{kG}(k, A) \arrow[r, hook] & \mathrm{Hom}_{kG}(kQ, A) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{kG}(IQ, A) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1_{kG}(k, A) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1_{kG}(kQ, A)
\end{tikzcd}$$

Wegen der Exaktheit der Zeilen ergibt sich die Exaktheit der Folge

$$0 \to \mathrm{Ext}^1_{kQ}(k, A^N) \to \mathrm{Ext}^1_{kG}(k, A) \to \mathrm{Ext}^1_{kG}(kQ, A).$$

Es bleibt

$$\mathrm{Ext}^1_{kG}(kQ, A) \cong \mathrm{Ext}^1_{kN}(k, A{\downarrow_N}).$$

zu zeigen. Nach Lemma 3.43 gilt $kQ = k{\uparrow^G}$. Damit folgt diese letzte Behauptung direkt aus Satz 3.29. ☐

Nun kommen einige Folgerungen der exakten Sequenzen aus Theorem 3.41.

Satz 3.44. *Es sei A ein einfacher kG-Modul mit $\mathrm{Ext}^1_{kG}(k, A) \neq 0$. Dann operiert $O_{p'p}G$ trivial in A.*

Beweis. Es sein $N = O_{p'}G$. Da kN halbeinfach ist, gilt $0 = \mathrm{Ext}^1_{kN}(k, A{\downarrow_N})$ und das ist gleich $\mathrm{Ext}^1_{kG}(kQ, A)$ nach dem Beweis von Theorem 3.41. Mit Theorem 3.41 folgt dann

$$\mathrm{Ext}^1_{kQ}(k, A^N) = \mathrm{Ext}^1_{kG}(k, A).$$

Die Voraussetzung $\mathrm{Ext}^1_{kG}(k, A) \neq 0$ impliziert daher $A^N \neq 0$. Da A einfach ist, bedeuted dies, $A^N = A$, also operiert N trivial in A. Der Modul A ist folglich ein einfacher $k(G/O_{p'}G)$-Modul. Nach Satz 3.33 opieriert $O_p(G/O_{p'}G)$ also trivial im kG-Modul A. ☐

Definition. Der *Hauptblock* einer Gruppenalgebra kG ist der Block, der den trivialen Modul k enthält.

Korollar 3.45. *Es sei $G = O_{p'p}G$. Dann besteht der Hauptblock nur aus dem trivialen Modul k.*

Beweis. Wäre k nicht der einzige einfache Modul im Hauptblock von G, so würde ein nicht-trivialer einfacher kG-Modul A existieren mit $\mathrm{Ext}^1_{kG}(k, A) \neq$ oder $\mathrm{Ext}^1_{kG}(A, k) \neq 0$. Nun gilt aber $\mathrm{Ext}^1_{kG}(A, k) = \mathrm{Ext}^1_{kG}(k^*, A^*) = \mathrm{Ext}^1_{kG}(k, A^*)$. In beiden Fällen hätte man damit wegen $G = O_{p'p}G$ einen Widerspruch zur Aussage von Satz 3.44. ☐

Satz 3.46. *Es sei A ein einfacher kG-Modul im Hauptblock von kG. Dann operiert $O_{p'p}G$ trivial in A.*

Beweis. Wir setzen $N = O_{p'p}G$. Nach der Definition des Hauptblockes genügt es, das Folgende zu zeigen: Es seien A und B zwei einfache kG-Moduln mit $\mathrm{Ext}^1_{kG}(A, B) \neq 0$. Operiert N trivial in A, so operiert N auch trivial in B. (Der Fall $\mathrm{Ext}^1_{kG}(B, A) \neq 0$ lässt sich darauf zurückführen, indem man zu den dualen Moduln A^* und B^* übergeht).

Wir betrachten den kG-Modul $\mathrm{Hom}_{kG}(A, B)$. Es gilt $\mathrm{Hom}_{kG}(A, B)^N = \mathrm{Hom}_{kG}(A, B)$. Ist nämlich $f : A \to B$ fix (invariant) unter der Operation von N, so gilt

$$f(a) = (uf)(a) = u(f(u^{-1}a)), \quad u \in U, \quad a \in A,$$

mit andern Worten: f ist ein kN-Modulhomomorphismus.

Theorem 3.41 liefert die exakte Folge

$$0 \to \mathrm{Ext}^1_{kQ}(k, \mathrm{Hom}_{kN}(A, B)) = \mathrm{Ext}_{kG}(k, \mathrm{Hom}_k(A, B)) \to \mathrm{Ext}_{kN}(k, \mathrm{Hom}_k(A, B))$$

(manchmal wird $\downarrow_N$ im letzten Term weggelassen, da es wegen dem Index ${}_{kN}$ bei Ext klar ist, dass wir kN-Moduln betrachten...). Nach Voraussetzung gilt $\mathrm{Ext}^1_{kG}(k, \mathrm{Hom}_k(A, B)) = \mathrm{Ext}^1_{kG}(A, B) \neq 0$ (benutze Korollar 3.21). Wegen der Exaktheit muss also mindestens eine der anderen Gruppen ebenfalls nicht-trivial sein. Wir betrachten diese beiden Fälle getrennt:

1. Es gelte $\mathrm{Ext}^1_{kQ}(k, \mathrm{Hom}_{kN}(A, B)) \neq 0$.

Dann gilt *a fortiori* $\mathrm{Hom}_{kN}(A, B) \neq 0$. Nach Voraussetzung operiert N trivial in A. Ist $\alpha : A \to B$ ein kN-Modulhomomorphismus, so folgt also $\operatorname{im} \alpha \subset B^N$. Wir erhalten $B^N \neq 0$, also $B^N = B$ (B ist einfach). Dies bedeutet aber, dass N trivial auf B operiert. Dies war zu beweisen.

2. Es sei $0 \neq \mathrm{Ext}_{kN}(k, \mathrm{Hom}_k(A, B)) = \mathrm{Ext}^1_{kN}(A{\downarrow_N}, B{\downarrow_N})$.

Nach Voraussetzung ist $A{\downarrow_N}$ eine direkte Summe von Kopien von k. Setzen wir ferner $B{\downarrow_N} = \oplus B_i$ (B_i einfach), so folgt aus der Additivität von Ext (Ext ist ein derivierter Funktor und derivierte Funktoren sind additiv), dass ein j existiert mit $\mathrm{Ext}_{kN}(k, B_j) \neq 0$. Wegen $N = O_{p'p}G$ bedeutet dies aber nach Satz 3.44, dass $B_j = k$. Damit folgt $0 \neq B_j \subset B^N$, und da B einfach ist, folgt $B^N = B$, also operiert N in B trivial. ☐

Korollar 3.47. *Es sei P ein prinzipaler unzerlegbarer Modul im Hauptblock von kG. Dann operiert $O_{p'}G$ trivial in P.*

Beweis. Setze $R = O_{p'}G$. Nach Satz 3.15 ist $P{\downarrow_R}$ halbeinfach. Die darin vorkommenden direkten Summanden C_i lassen sich auch erhalten, indem man die kG-Kompositionsfaktoren M_j von P auf R einschränkt (Restriktion). Aber jedes M_j ist ein einfacher Modul im Hauptblock von kG. Nach Satz 3.46 operiert $R = O_{p'}G \subset O_{p'p}G$ trivial in M_j, also auch trivial in C_j. Damit operiert R trivial in ganz P. ☐

3.7 Flache Moduln

Für diesen Abschnitt sei wieder Λ ein Ring mit Eins. (Eigentlich könnte dies hier direkt nach Abschnitt 2.6 behandelt werden!) Hier wird eine weitere Eigenschaft von Λ-Moduln beschrieben.

Im Allgemeinen ist tensorieren mit einem Modul nicht exakt. Das wurde schon im Abschnitt 2.6 bemerkt, als der Tor-Funktor definiert wurde:

Zur Erinnerung: Ist M ein rechts-Λ-Modul, so ist der Funktor $\mathrm{Tor}_n^\Lambda(M, -)$ wie folgt definiert. Jedem links-Λ-Modul A ordnet $\mathrm{Tor}_n^\Lambda(M, A)$ die n-te Homologiegruppe des Kettenkomplexes $M \otimes P$ zu (P eine projektive Auflösung von A mit Differentialen ∂_n):

$$\mathrm{Tor}_n^\Lambda(M, A) = H_n(M \otimes P, 1 \otimes \partial^*).$$

Flache Moduln sind solche, für die tensorieren exakt ist.

Definition. Ein rechts-Λ-Modul M heisst *flach*, wenn der Funktor $M \otimes_\Lambda -$ exakt ist. Analog heisst ein links-Λ-Modul N *flach*, falls der Funktor $- \otimes_\Lambda N$ exakt ist.

(Das ist ein Funktor Λ-**Mod** nach **Ab**).

Insbesondere sind also projektive Moduln (und freie Moduln) flach. Was ist ein Beispiel, das zeigt, dass flache Moduln nicht unbedingt projektiv sind?

Also hat man eine Kette

$$\text{frei} \Longrightarrow \text{projektiv} \Longrightarrow \text{flach}$$

Bemerkung 3.48. Man hat äquivalente Eigenschaften:
(i) Der links-Λ-Modul M ist flach
(ii) $\mathrm{Tor}_1(N, M) = 0$ für alle rechts-Λ-Moduln N.
(iii) $\mathrm{Tor}_n(N, M) = 0$ für alle $n > 0$, für alle rechts-Λ-Moduln N.

Teil II

Modulare Darstellungstheorie

Kapitel 4

Einleitung

Der zweite Teil hält sich zuerst v.a. an das Buch [C] von J. Carlson.

Voraussetzungen: G eine endliche Gruppe über einem ein Körper k der Charakteristik $p > 0$. Zur Abkürzung schreiben Hom für Hom_k und $\otimes$ für $\otimes_k$. Zur Erinnerung: die Kategorie der endlich erzeugten links-kG-Moduln wird kG-**mod** geschrieben (kleines **m**...).

In der Darstellungstheorie geht es darum, eine Übersicht über alle Darstellungen einer Gruppe G zu gewinnen. Zuerst will man jeweils die irreduziblen Darstellungen (also die einfachen Moduln) beschreiben.

Es gibt zwei wichtige Spezialfälle: einerseits den Fall $k = \mathbb{C}$ und andrerseits die modulare Darstellungstheorie, d.h. den Fall "Charakteristik von k teilt die Gruppenordnung $|G|$". Ist G eine endliche Gruppe über $\mathbb{C}$, so ist das Problem, alle Darstellungen zu kennen, bereits im wesentlichen gelöst: Jeder (endlich-dimensionale) Modul ist dann eine direkte Summe von einfachen Moduln.

In der modularen Darstellungstheorie ist dies anders: es gibt da neben der Bildung der direkten Summe weitere Arten, um Modulerweiterungen zu bilden. Der zweite Schritt besteht hier darin, die verschiedenen Modulerweiterungen zu studieren. In der homologischen Algebra werden die Erweiterungen mit Hilfe der Funktoren $\mathrm{Ext}^*_{kG}(-,-)$ beschrieben. In diesem Fall können sie mit Hilfe der Cohmologiegruppen $H^*(G,-)$ ausgedrückt werden. Damit ist die modulare Darstellungstheorie mit der Theorie der Cohomologie der Gruppen verknüpft.

Man bemerke, dass wir im Kapitel 3 schon modulare Darstellungstheorie gemacht haben, ohne es so zu nennen.

Etwas genauer

Im Abschnitt 3.1 haben wir den Graph $\Gamma(G) = \Gamma(kG)$ definiert, dessen Punkte (Knoten) die einfachen Moduln (bis auf Isomorphie) $S_0 = k$, $S_1, \ldots, S_l$ sind und wo es eine Kante zwischen S_i und S_j hat genau dann, wenn $\mathrm{Ext}^1_{kG}(S_i, S_j) \neq 0$ oder $\mathrm{Ext}^1_{kG}(S_j, S_i) \neq 0$ ist. Die Blöcke der Algebra kG sind die Zusammenhangskomponenten von $\Gamma(G)$. Der Block, der k enthält heisst der Hauptblock oder der *prinzipale Block*.

Die Rolle der einfachen Moduln in der Darstellungstheorie über $\mathbb{C}$ wird in der modularen Darstellungstheorie von der Rolle der unzerlegbaren Moduln eingenommen (i.e. der Moduln, die sich nicht auf nicht-triviale Weise als direkte Summe von Untermoduln schreiben lassen). Wir wissen (Korollar 3.3) dass die Kompositionsfaktoren eines unzerlegbaren Moduls alle im gleichen Block liegen.

Für endliche Gruppen gibt es immer eine endliche Zahl von (Isomorphieklassen von) einfachen Moduln. Die Zahl der (Isomorphieklassen von) unzerlegbaren Moduln ist jedoch meistens unendlich. Es gibt endlich viele davon genau dann, wenn die p-Sylow-Untergruppen von G zyklisch sind.

In diesem Fall sagt man, *der Darstellungstyp von kG sei endlich.* Andernfalls heisst der Darstellungstyp von kG *unendlich.* Im Fall von endlichem Darstellungstyp kann man die unzerlegbaren Moduln klassifizieren (klassische modulare Darstellungstheorie von Brauer, Theorie des zyklischen Defekts). Ist der Darstellungstyp unendlich, so geht das nicht. Man kann zeigen, dass dann in den meisten Fällen die Darstellungstheorie von kG diejenige der polynomialen Algebra in zwei nicht-kommutierenden Erzeugenden enthält. Und man weiss, dass diese zu kompliziert ist, um sie zu behandeln.

4.1 Augmentierung, nilpotente Ideale, Halbeinfachheit

[Vorlesung 11, 23.6.2014]

Zuerst ein paar Tatsachen. Maschkes Satz (siehe weiter unten) sagt, dass jede exakte Folge von kG-Moduln zerfällt und dass jeder kG-Modul sowohl projektiv als auch injektiv ist, falls p die Ordnung der Gruppe G nicht teilt. Also wird homologische Algebra erst interessant im Fall, wo p die Ordnung $|G|$ der Gruppe teilt.

Wir haben den Vergissfunktor F (für "forgetful"),

$$F: \; kG\text{-}\mathbf{mod} \longrightarrow \; k\text{-}\mathbf{mod} = k\text{-}\mathbf{vr}$$

von der Kategorie der endlich erzeugten links-kG-Moduln in die Kategorie k-**vr** der endlich-dimensionalen k-Vektorräume, wobei $F(A)$ (für den kG-Modul A) einfach A selbst, aufgefasst als k-Vektorraum ist (man vergisst die kG-Modulstruktur).
Es ist $\dim_k A < \infty$ wegen $|G| < \infty$.

Bemerkung. Damit kann man auf jeden kG-Modul M Methoden der linearen Algebra anwenden. Die Elemente der Gruppe G operieren als lineare Transformationen von Vektorräumen. Wir erhalten einen Homomorphismus $\varphi : G \to \mathrm{GL}_{\dim M}(k)$, der jedem Element von G die Matrix seiner Operation auf M zuordnet (bzgl. einer gewählten Basis in M). Dieser Homomorphismus heisst die *Darstellung, die M zugeordnet ist.*

Wir haben einen weiteren Funktor

$$S : kG\text{-}\mathbf{mod} \longrightarrow \mathbf{mod}\text{-}kG$$

von der Kategorie der endlich erzeugten links-kG-Moduln in die Kategorie der endlich erzeugten rechts-kG-Moduln, gegeben durch $S(M) = M$ als k-Vektorräume ($M \in kG$-**mod**), mit Operation $mg := g^{-1}m$ für $m \in S(M)$, $g \in G$. Auf der Ebene der Morphismen: $M \xrightarrow{\alpha} N$ wird $S(\alpha)$ zugeordnet mittels $S(\alpha)(m) = \alpha(m)$ für $m \in S(M) = M$. Der Funktor S ist eine Äquivalenz von Kategorien. Daher genügt es, links-kG-Moduln zu betrachten.

Definition. Die *Augmentierungsabbildung* $\varepsilon = \varepsilon_G : kG \to k$ ist der Ringhomomorphismus, der gegeben ist durch $\sum_{g\in G} a_g g \mapsto \sum_{g\in G} a_g$.
Man sagt dann, dass kG eine *augmentierte Algebra* ist.

Die Augmentierungsabbildung macht k zu einem kG-Modul durch $a \cdot 1 = \varepsilon(a)1$ für $a \in G$. k heisst der *triviale kG-Modul* da $g \cdot 1 = 1$ für alle $g \in G$ Der Kern der Augmentierungsabbildung ist ein zwei-seitiges Ideal $\mathcal{A} = \mathcal{A}_G$ in kG von der Kodimension 1. $\mathcal{A}_G$ hat als k-Vektorraumbasis die Elemente $(g-1)_{g\in G\setminus\{1\}}$. Es heisst das *Augmentierungsideal.* Wir haben also eine exakte Folge

$$0 \to \mathcal{A} \hookrightarrow kG \overset{\varepsilon}{\to} k \to 0 \ .$$

Satz 4.1. *Das Augmentierungsideal einer endlichen p-Gruppe ist nilpotent.*

Beweis. Induktion über die Ordnung der Gruppe.
Sei $G = C_p$, i.e. $|G| = p$, $G =< t >$. Dieser Fall als Übung: man zeigt, dass $\mathcal{A}_G^p = 0$ ist.
Sei nun $|G| > p$, sei $H \subsetneq G$ eine maximale Untergruppe. Dann ist H eine normale Untergruppe vom Index p in G. Die natürliche Projektion $G \overset{\pi}{\to} G/H$ induziert einen surjektiven Homomorphismus $kG \overset{\theta}{\to} k(G/H)$. Die Augmentierungsabbildung $\varepsilon_G : kG \to k$ faktorisiert: $\varepsilon_G = \varepsilon_{G/H} \circ \theta$. Also ist $I := \ker\theta \subset \ker\varepsilon_G = \mathcal{A}_G$. Zudem ist

$$\theta(\mathcal{A}_G) = \theta(\ker\varepsilon_G) = \theta(\ker\varepsilon_{G/H} \circ\theta) = \ker\varepsilon_{G/H} = \mathcal{A}_{G/H} \ .$$

Wir haben schon gezeigt, dass $\mathcal{A}_{G/H}^p = 0$ ist. Also ist $\mathcal{A}_G^p \subset \ker\theta = I$. Es genügt dann, zu zeigen, dass I nilpotent ist.

Wähle x in $G \setminus H$. Da $G = \cup_{i=0}^{p-1} x^i H$ ist, können wir jedes $a \in kG$ in der Form

$$a = \sum_{i=0}^{p-1} \sum_{h\in H} a_{x^ih} x^i h = \sum_{i=0}^{p-1} x^i \sum_{h\in H} a_{x^ih} h$$

schreiben. Ist $a \in I$, so ist

$$0 = \theta(a) = \sum_{i=0}^{p-1} \pi(x)^i \sum_{h\in H} a_{x^ih}$$

und daher folgt $\sum_{h\in H} a_{x^ih} = 0$ $(0 \leq i \leq p-1)$, also ist $\sum_{h\in H} a_{x^ih} h \in \mathcal{A}_H$ für $i = 0, \ldots, p-1$. Damit ist $I \subset kG\mathcal{A}_H$, sogar $I = kG\mathcal{A}_H$.

Die Formel $g_1(h_1-1)g_2(h_2-1) = g_1g_2(g_2^{-1}h_1g_2 - 1)(h_2-1)$ zeigt, dass $I^2 = kG\mathcal{A}_H^2$, und, allgemeiner, dass $I^n = kG\mathcal{A}_H^n$. Da aber $\mathcal{A}_H$ nach Induktionsvoraussetzung nilpotent ist, sind wir fertig. $\square$

Korollar 4.2. *Ist G eine endliche p-Gruppe, so ist $\mathcal{A}_G^{|G|} = 0$.*

Beweis. Die Folge $(\dim \mathcal{A}_G^n)_{n=1,2,\ldots}$ ist echt absteigend, solange n genügend klein ist. ☐

Korollar 4.3. *Ist G eine endliche p-Gruppe, dann ist kG ein lokaler Ring mit (einzigem) Maximalideal $\mathcal{A}_G$.*

Zur Erinnerung: das *Radikal* $\operatorname{rad} A$ einer endlich-dimensionalen Algebra A (mit 1) ist der Durchschnitt über alle maximalen Linksideale in A. Es ist ein zweiseitiges nilpotentes Ideal, gleich der Summe aller nilpotenten Linksideale in A. (cf. 5.15. in [CR]).

Wir können nun den Satz von Maschke beweisen. Dessen Aussage ist, dass für einen Körper k die Gruppenalgebra kG halbeinfach ist genau dann, wenn k die Ordnung von G nicht teilt (kG ist halbeinfach, falls alle kG-Moduln halbeinfach sind). Eine Algebra A ist halbeinfach genau dann, wenn $\operatorname{rad} A = 0$ ist.

Satz 4.4 (Maschke)**.** *Die Gruppenalgebra kG ist halbeinfach genau dann, wenn p die Ordnung von G nicht teilt.*

Beweis. Wir zeigen: kG besitzt kein nilpotentes Linksideal $\neq 0 \iff p$ teilt $|G|$ nicht.

(Mit der Bemerkung oberhalb vom Satz, dass kG halbeinfach ist genau dann, wenn $\operatorname{rad} kG = 0$ ist, folgt dann die Behauptung von Maschke's Theorem).

Sei zuerst p ein Teiler von $|G|$. Sei $\widetilde{G} := \sum_{g \in G} g \in kG$. Für $x \in G$ ist $x\widetilde{G} = \widetilde{G} = \widetilde{G}x$. Ist also $a \in kG$, so gilt $a\widetilde{G} = \varepsilon(a)\widetilde{G}$. Also ist $k\widetilde{G}$ ein ein-dimensionales (zweiseitiges) Ideal in kG. Da $(\widetilde{G})^2 = |G| \cdot \widetilde{G} = 0$ ist, ist $k\widetilde{G}$ ein nilpotentes Ideal $\neq 0$ in kG.

Nun nehmen wir an, dass p die Ordnung $|G|$ nicht teilt. ($\operatorname{char} k = 0$ ist hier erlaubt). Wir zeigen, dass dann jede kurze exakte Folge in kG-**mod** zerfällt. Sei

$$0 \to A \overset{\alpha}{\to} B \overset{\beta}{\to} C \to 0$$

eine kurze exakte Folge in kG-**mod**. Es existiert ein k-Homomorphismus $\varphi : C \to B$, so dass $\beta\varphi = 1_C$. Dann definieren wir $\widehat{\varphi} : C \to B$ durch

$$\widehat{\varphi} := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g\varphi\,.$$

Die so definierte Abbildung $\widehat{\varphi}$ ist ein kG-Homomorphismus und es ist $\beta\widehat{\varphi} = 1_C$. Nun muss man noch zeigen, dass kG kein nilpotentes Linksideal hat, das $\neq 0$ ist. Das folgt mit Lemma 4.5 unten. Denn nun zerfällt jede kurze exakte Folge, also muss insbesondere

$$0 \to N \to kG \to kG/N \to 0$$

zerfallen für jedes nilpotente Ideal N. Nach Lemma 4.5 kann daher N nicht $\neq 0$ sein. ☐

Lemma 4.5. *Sei A eine endlich-dimensionale Algebra (mit 1), sei $N \subset A$ ein nilpotentes Linksideal verschieden von 0. Dann zerfällt die exakte Folge*

$$0 \to N \to A \to A/N \to 0$$

von A-Moduln nicht.

4.2 Tensor Produkte, Homs, und Dualität

Zwei der wichtigsten Operationen auf der Modulkategorie sind die Funktoren Hom und $\otimes$ von kG-**mod** $\times$ kG-**mod** nach kG-**mod**. Sie sind durch die Dualität verknüpft und können benutzt werden, um wichtige Informationen über die Gruppenalgebra und die zugehörigen Moduln zu erhalten. Wir betrachten hier ein paar Eigenschaften der Dualität. Insbesondere der Beweis, dass die Gruppenalgebren selbst-injektiv sind (und dass also die Unterkategorien von projektiven und injektiven Moduln übereinstimmen - wie wir schon in Korollar 3.26 in gesehen haben).

Für M und N in kG-**mod** ist ja $M \otimes N$ auch in kG-**mod** (mit der diagonalen Operation $g(m \otimes n) = gm \otimes gn$), wie in Abschnitt 3.4 eingeführt.

Bemerkung. Ist A eine beliebige k-Algebra, M, N zwei A-Moduln, so ist $M \otimes N$ ein $A \otimes A$-Modul. Für $A = kG$ haben wir die Comultiplikation $\Delta : \ kG \to kG \otimes kG$, i.e. den kG-Algebren Homomorphismus, der durch $g \mapsto \Delta(g) = g \otimes g$ gegeben ist. Das ist die Diagonalabbildung, die zur Hopf-Algebren Struktur von kG gehört. In dieser Sprache ist dann die kG-Operation auf $M \otimes N$ das Pullback entlang von Δ der $kG \otimes kG$-Operation.

Der duale Modul zu $M \in kG$-**mod** ist $M^* = \mathrm{Hom}(M, k)$. Die G-Operation ist

$$(gf)(m) = f(g^{-1}m) \qquad \text{für } g \in G,\ f \in M^*,\ m \in M,$$

die *kontragrediente* Operation. (Dies ist hier dasselbe wie die diagonale Operation $(gf)(m) = gf(g^{-1}m)$, da G auf k trivial operiert). Dies ist ein Spezialfall von Folgendem: Ist A eine beliebige augmentierte k-Algebra, so ist $M^* = \mathrm{Hom}(M, k)$ ein *rechts*-A-Modul durch

$$(fa)(m) := f(am) \qquad \text{für } a \in A,\ f \in M^*,\ m \in M.$$

Dies wird zu einem links-kG-Modul mittels der Invertierung.

Mit Korollar 3.20 haben wir insbesondere erhalten, dass $\mathrm{Hom}(M, N)$ und $M^* \otimes N$ natürlich isomorph sind. Die Abbildung von $M^* \otimes N$ nach $\mathrm{Hom}(M, N)$ ist folgende:

$$f \otimes n \quad \longmapsto \quad m \mapsto (f \otimes n)(m) = f(m)n\,,$$

für $f \in M^*$, $n \in N$, $m \in M$.

Übungen: Überprüfung, dass es ein kG-Modulhomomorphismus ist, und dass es eine natürliche Isomorphie gibt.

Sei nun $N = M$. Dann ist $\mathrm{End}\, M = \mathrm{Hom}(M, M) = M^* \otimes M$ ein Ring. Das Produkt in $M^* \otimes M$ (entsprechend dem Produkt in $\mathrm{End}\, M$) ist gegeben durch die Formel

$$(f \otimes m)(f' \otimes m') = f(m') \cdot f' \otimes m$$

(wie man überprüfen kann). Ist (m_i) eine k-Basis von M und (m_i^*) eine dazu duale Basis, so entspricht $r := \sum_i m_i^* \otimes m_i$ dem Identitätshomomorphismus 1_M in $\mathrm{End}\, M$. Wir haben die kG-Homomorphismen

$$\begin{array}{ll} I: & k \to M^* \otimes M \\ & 1 \mapsto r \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{lll} \mathrm{Tr}: & M^* \otimes M & \to k \\ & f \otimes m & \mapsto f(m)\,. \end{array}$$

Notation. Sind M, N zwei kG-Moduln, so schreiben wir $M \mid N$, falls M isomorph ist zu einem direkten Summanden von N.

Lemma 4.6. *Sei $M \in$ kG-**mod**. Dann ist $k \mid M^* \otimes M$, falls $p \nmid \dim M$.*

Beweis. Die Abbildung $\frac{1}{\dim M} \cdot I$ ist ein Schnitt (ein rechts-Inverses) des Homomorphismus $M^* \otimes M \overset{\mathrm{Tr}}{\twoheadrightarrow} k$. ☐

Satz 4.7. *Sei $M \in kG$-**mod**. Dann gilt $M \mid M \otimes M^* \otimes M$. Gilt zudem $p \mid \dim M$, so haben wir $M \oplus M \mid M \otimes M^* \otimes M$.*

Beweis. Es ist $M \cong M \otimes k$. Falls $p \nmid \dim M$, so ist nach Lemma 4.6 oben $M \otimes k$ isomorph zu einem direkten Summanden von $M \otimes M^* \otimes M$.

Sei also p ein Teiler der Dimension von M. Sei (m_i) eine k-Basis von M und (m_i^*) die duale Basis. Wir definieren Abbildungen ψ, θ,

$$\begin{tikzcd} M \otimes M^* \otimes M \arrow[r, shift left, "\psi"] & M \oplus M \arrow[l, shift left, "\theta"] \end{tikzcd}$$

durch

$$\begin{aligned} \psi(m \otimes f \otimes m') &:= (f(m)m', f(m')m) \\ \theta(m, m') &:= \sum_i m \otimes m_i^* \otimes m_i + \sum_i m_i \otimes m_i^* \otimes m' \ . \end{aligned}$$

ψ ist surjektiv und für die Verknüpfung gilt

$$\begin{aligned} \psi\theta(m, m') &= (\underbrace{\sum_i m_i^*(m)m_i}_{=m} + \underbrace{\sum_i m_i^*(m_i)m'}_{=\dim M \cdot m'}, \underbrace{\sum_i m_i^*(m_i)m}_{=\dim M \cdot m} + \underbrace{\sum_i m_i^*(m')m_i}_{=m'}) \\ &= (m, m') \end{aligned}$$

(nach Voraussetzung ist $\dim M \neq 0$), also ist θ ein rechts-Inverses zu ψ. ☐

Diese beiden Resultat werden nützlich im Zusammenhang mit Restriktion und Induktion. Im Rest dieses Abschnittes geht es um darum, dass kG selbst-injektiv ist. Als Konsequenz davon ist ein kG-Modul projektiv genau dann, wenn er injektiv ist.

Definition. Seien U und V k-Vektorräume. Eine Abbildung $\rho : U \times V \to k$ heisst *bilineares Paar*, falls ρ linear ist in beiden Variablen. ρ heisst *nicht-degeneriert*, falls $\rho(u, v) = 0$ für alle $v \in V$ impliziert, dass $u = 0$ ist und $\rho(u, v) = 0$ für alle $u \in U$ impliziert, dass $v = 0$ ist. Sind U und V zwei kG-Moduln, so heisst ρ *G-invariant*, falls $\rho(gu, gv) = \rho(u, v)$ ist für alle $g \in G$, $u \in U$, $v \in V$.

Satz 4.8. *Ist ρ ein nicht-degeneriertes bilineares Paar der endlich dimensionalen k-Vektorräume U und V, so ist $U \cong V^*$. Sind zudem U und V in kG-**mod** und ρ G-invariant, so sind U und V^* isomorph als kG-Moduln.*

Beweis. Da ρ nicht-degeneriert ist, ist die k-lineare Abbildung $\sigma : U \to V^*$, die durch $\sigma(u) := \rho(u, -)$ definiert ist, ein Isomorphismus. Ist ρ G-invariant (und U, V kG-Moduln), dann ist σ ein kG-Modulhomomorphismus. ☐

Für M in kG-**mod** ist der natürliche k-Vektorraumisomorphismus $M \cong M^{**}$ ein kG-Homomorphismus. Daher können wir M und M^{**} identifizieren. Man beachte, dass sogar im Fall, wo M und M^* isomorph sind als k-Vektorräume (hier ist natürlich isomorph gemeint), sie im allgemeinen nicht isomorph sind als kG-Moduln. Wir wissen jedoch, dass im Fall $M = kG$ die Moduln M und M^* isomorph sind (Satz 3.22). (Die Abbildung Ψ, die wir dort definiert hatten, kommt vom folgenden bilinearen Paar von $kG \times kG \to k$: $(g, g') \mapsto \delta_{g,g'}$, für Elemente aus G, das linear erweitert wird auf kG. Dieses bilineare Paar ist nicht-degeneriert und G-invariant.)

Wegen der Eigenschaft $kG \cong kG^*$ sagt man, dass kG eine *Frobenius Algebra* ist (Satz 3.22).

Satz 4.9. *kG ist ein injektiver kG-Modul (i.e. kG ist selbst-injektiv).*

Beweis. Wir nehmen an, dass wir ein Diagramm

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\sigma"] & B \\
& kG &
\end{tikzcd}$$

haben mit exakter Zeile. Die Injektivität von kG bedeutet, dass wir eine kG-Homomorphismus $\psi : B \to kG$ einfügen können, so dass das Diagramm kommutiert. Um zu zeigen, dass wir eine solche Abbildung ψ finden können, gehen wir über zu den dualen Moduln, für die wir das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
& kG^* \cong kG \arrow[dl] \arrow[d, "\sigma^*"] & \\
B^* \arrow[r, "\varphi^*"] & A^* \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

in kG-**mod** erhalten, mit exakter Zeile. Da $kG^* \cong kG$ gilt (nach Satz 3.22), und weil kG projektiv ist und φ^* surjektiv, existiert ein kG-Homomorphismus $\theta : kG^* \to B^*$, so dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
& kG^* \cong kG \arrow[dl, "\theta"'] \arrow[d, "\sigma^*"] & \\
B^* \arrow[r, "\varphi^*"] & A^* \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

kommutiert. Wir gehen nun nochmals zu den dualen Moduln über und erhalten $\psi = \theta^*$. □

Korollar 4.10. *Jeder (endlich erzeugte) injektive kG-Modul ist projektiv und jeder (endlich erzeugte) projektive kG-Modul ist injektiv.*

Übung: Beweis von Korollar 4.10. Hinweise:
1.) der duale eines projektiven Modul ist injektiv (und umgekehrt),
2.) der duale eines projektiven Moduls ist projektiv.

4.3 Restriktion und Induktion

Wir betrachten hier die Funktoren Restriktion und Induktion (aus Abschnitt 3.5). Diese beiden Funktoren werden immer wieder benutzt in der Theorie der Darstellungen von Gruppen und in der Cohomologie. Durch die Frobenius-Reziprozität (Satz 3.28) sind die beiden Funktoren verbunden.

Notation. Sei H eine Untergruppe von G, $A \in kG$-**mod**, $B \in kH$-**mod**. Wir schreiben oft Ind_H^G für den Funktor $B \mapsto B{\uparrow}^G = kG \otimes_{kH} B$ und Res_H^G für den Funktor $A \mapsto A{\downarrow}_H$.

Die Frobenius-Reziprozität sagt dann: die Abbildung $\Phi(\beta)(g \otimes b) = g(\beta(b))$ gibt einen natürlichen Isomorphismus

$$\Phi : \ \mathrm{Hom}_{kH}(B, A{\downarrow}_H) \to \mathrm{Hom}_{kG}(B{\uparrow}^G, A)$$

(dabei ist $g \in G$, $b \in B$ und $\beta : B \to A{\downarrow}_H$).

Bemerkung. (1) Die beiden Funktoren Ind_H^G und Res_H^G sind exakt. Ersterer, da mit kG tensoriert wird und kG ein freier (also insbesondere projektiver und also flacher) rechts-kH-Modul ist. (kG ist freier kH-Modul: das ist die Aussage von Lemma 3.16).

(2) Der Modul kG kann als induzierter Modul gesehen werden: $kG \cong k{\uparrow}^G$, wobei k als der triviale $k\langle\rangle$-Modul aufgefasst wird (wobei $\langle\rangle$ die triviale Untegruppe von G ist).

Wir haben im Beweis von Korollar 3.21 gezeigt, dass für einen projektiven kG-Modul P auch $P \otimes M$ projektiv ist für jeden Modul $M \in kG$-**mod**.

Notation. Gilt für $L \in kG$-**mod**, dass $L \cong M \oplus P$ für kG-Moduln M, P, wobei P projektiv ist, so schreiben wir $L \cong M \oplus (\text{proj})$.

Satz 4.11. *Sei $M \in kG$-**mod**. Ist $M \otimes M \cong M \oplus (\text{proj})$ und M selbst nicht projektiv, dann ist $M \cong k \oplus (\text{proj})$.*

Beweis. [C, Theorem 3.5]. □

4.4 Projektive Auflösungen und Cohomologie

Definition. 1) Ein *projektive Hülle* oder *projektive Decke* eines Moduls M ist ein projektiver Modul P_M zusammen mit einem surjektiven Homomorphismus $P_M \overset{\varepsilon}{\twoheadrightarrow} M$, der folgende Eigenschaften hat: ist $Q \overset{\theta}{\twoheadrightarrow} M$ ein Homomorphismus mit Q projektiv, dann existiert ein injektiver Homomorphismus $P_M \overset{\sigma}{\hookrightarrow} Q$, so dass $\varepsilon = \theta\sigma$.

2) Eine *injektiven Hülle von* M ist ein injektiver Modul I_M und ein injektiver Homomorphismus $M \overset{\varepsilon'}{\hookrightarrow} I_M$, so dass für jede injektive Abbildung $M \overset{\iota}{\hookrightarrow} N$ mit N injektiv eine injektive Abbildung $I_M \overset{\nu}{\hookrightarrow} N$ existiert mit $\nu\,\varepsilon' = \iota$.

Die injektive Hülle eines Moduls ist, kurz gesagt, der kleinste injektive Modul der den gegeben Modul enthält (Begriff geht zurück auf Eckmann und Schopf, 1953).

$$\begin{tikzcd}
P_M \arrow[r, two heads, "\varepsilon"] \arrow[d, hook, dotted, "\exists\ \sigma"'] & M \\
Q \arrow[ur, two heads, "\theta"']
\end{tikzcd}$$

(kommutierende Diagramme)

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, hook, "\varepsilon'"] \arrow[d, hook, "\iota"'] & I_M \arrow[dl, hook, dotted, "\exists\ \nu"] \\
N
\end{tikzcd}$$

Bemerkung. Im Fall von kG-**mod** sind projektive Moduln auch injektiv und injektive Moduln auch projektiv. Damit (und mit Abschnitt 1.8: ein Modul P ist projektiv genau dann wenn, jede kurze exakte Folge mit P an dritter Stelle zerfällt. Und ein Modul I ist injektiv genau dann, wenn jede kurze exakte Folge mit I an erster Stelle zerfällt) kann man folgern, dass P_M ein direkter Summand ist von jedem andern projektiven Modul, der auf M abbildet und I_M ein direkter Summand ist von jedem andern injektiven Modul, in den M sich einbetten lässt:

$$\begin{tikzcd}
P_M \arrow[r, two heads, "\varepsilon"] \arrow[d, hook, shift right, "\sigma"'] & M \\
Q \arrow[u, shift right, "\pi"'] \arrow[ur, "\theta"']
\end{tikzcd}$$

P_M injektiv

I_M projektiv

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, hook, "\varepsilon'"] \arrow[d, hook, "\iota"'] & I_M \arrow[dl, hook, shift left, "\nu"] \\
N \arrow[ur, shift left, "\tau"]
\end{tikzcd}$$

Es ist $\pi\sigma = 1_{P_M}$, i.e. $Q = P_M \oplus Q'$ und $\tau\nu = 1_{I_M}$, i.e. $N = I_M \oplus N'$ (für Moduln Q' und N' in kG-**mod**).

Man kann mit Hilfe des Beweis vom nächsten Resultat sehen, dass jeder Homomorphismus $\sigma : P_M \to Q$ mit $\varepsilon = \theta\sigma$ injektiv sein muss. Analog ist jedes $\pi : Q \to P_M$ mit $\varepsilon\pi = \theta$ surjektiv.

Ist $P_M \overset{\varepsilon}{\twoheadrightarrow} M$ eine projektive Hülle von M, so existiert kein echter projektiver Untermodul von P_M, der surjektiv auf M abbildet. Falls projektive Hüllen existieren, so sind sie eindeutig bis auf Isomorphie. (Man kann zeigen: injektive Hüllen existieren und sie sind eindeutig bis auf Isomorphie)

Satz 4.12. *Sei M in kG-**mod**. Dann hat M eine projektive Hülle.*

Der einfachste Weg wäre, die Tatsache zu benutzen, dass jeder Modul in kG-**mod** eine injektive Hülle hat. Der duale Modul zur injektiven Hülle von M^* tut's dann.

Beweis. Sei P_M ein projektiver Modul in kG-**mod** von minimaler Dimension, so dass eine surjektive Abbildung $P_M \overset{\varepsilon}{\twoheadrightarrow} M$ existiert (ein solches P_M existiert, da M Quotient ist eines freien Moduls von endlichem Rang). Wir nehmen an, Q und θ seien gegeben wie in der obigen Definition. Da P_M und Q projektiv sind, haben wir das kommutierende Diagramm

$$\begin{tikzcd}
P_M \arrow[rr, shift right, "\sigma"'] \arrow[dr, two heads, "\varepsilon"'] & & Q \arrow[ll, shift right, "\tau"'] \arrow[dl, two heads, "\theta"] \\
& M &
\end{tikzcd}$$

Wir betrachten $\psi := \tau\sigma : P_M \to P_M$.
ψ ist ein Automorphismus: da P_M endlich-dimensional ist, können wir schreiben $P = \ker\psi^n \oplus \operatorname{im}\psi^n$ für ein n, das genügend gross ist (Fitting's Lemma)

Also ist das Bild $\operatorname{im}\psi^n$ projektiv (als direkter Summand von P_M). Ausserdem ist $\varepsilon \circ \psi^n = \varepsilon$, da das Diagramm kommutiert. Wegen der Minimalität muss dann $\ker\psi^n = 0$ sein, ψ ist also ein Automorphismus. Daher ist σ injektiv. ☐

Lemma 4.13 (Lemma von Schanuel)**.** *Seien $P \overset{\varepsilon}{\twoheadrightarrow} M$ und $Q \overset{\theta}{\twoheadrightarrow} M$ zwei surjektive Homomorphismen, P und Q projektiv. Dann ist* $\ker\varepsilon \oplus Q \cong \ker\theta \oplus P$.

Beweis. Wir haben folgendes kommutative Diagramm mit exakten Zeilen und Spalten

$$\begin{tikzcd}
& & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
& & \ker\theta \arrow[r, equal] \arrow[d] & \ker\theta \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \ker\varepsilon \arrow[r] \arrow[d, equal] & B \arrow[r] \arrow[d] & Q \arrow[r] \arrow[d, "\theta"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \ker\varepsilon \arrow[r] & P \arrow[r, "\varepsilon"'] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
& & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

wobei $B = \{(p,q) \in P \oplus Q \mid \varepsilon(p) = \theta(q)\}$ das Pullback ist von θ und ε. Man soll sich überlegen, wie alle Abbildungen aussehen. Da P und Q projektiv sind, zerfallen die mittlere Reihe und Spalte, d.h. $B \cong \ker\theta \oplus P$ und $B \cong \ker\varepsilon \oplus Q$. (Damit ist auch direkt angegeben, welcher Modul $\ker\theta \oplus P \cong \ker\varepsilon \oplus Q$ ist). ☐

Notation. Sei $M \in kG$-**mod**. Ist

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{n+1}} P_n \xrightarrow{\partial_n} P_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \ldots \longrightarrow P_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \to 0\,,$$

eine (augmentierte) projektive Auflösung von M und

$$0 \to M \xrightarrow{\theta} I_0 \to \cdots \xrightarrow{\partial^{n-1}} I_{-(n-1)} \xrightarrow{\partial^n} I_{-n} \xrightarrow{\partial^{n+1}} \ldots\,,$$

eine (augmentierte) injektive Auflösung von M, so schreiben wir zur Abkürzung $P_* \overset{\varepsilon}{\twoheadrightarrow} M$ bzw. $M \overset{\theta}{\hookrightarrow} I_*$.

Definition. 1.) Eine *minimale projektive Auflösung von M* ist eine projektive Auflösung $P_* \twoheadrightarrow M$, mit der Eigenschaft, dass es für jede projektive Auflösung $Q_* \twoheadrightarrow M$ von M eine injektive Kettenabbildung $\mu_* : (P_* \overset{\varepsilon}{\twoheadrightarrow} M) \to (Q_* \twoheadrightarrow M)$, und eine surjektive Kettenabbildung $\mu'_* : (Q_* \twoheadrightarrow M) \to (P_* \overset{\varepsilon}{\twoheadrightarrow} M)$ gibt, so dass μ_* und μ'_* die Identität $M \to M$ hochheben.

2.) Eine *minimale injektive Auflösung von M* ist eine injektive Auflösung $M \overset{\theta}{\hookrightarrow} I_*$ mit der Eigenschaft, dass für jede weitere injektive Auflösung $M \hookrightarrow J_*$ von M eine injektive Kettenabbildung $\nu_* : (M \overset{\theta}{\hookrightarrow} I_*) \to (M \hookrightarrow J_*)$, und eine surjektive Kettenabbildung $\nu'_* : (M \hookrightarrow J_*) \to (M \overset{\theta}{\hookrightarrow} I_*)$ existieren, so dass ν_* und ν'_* die Identität von M fortsetzen.

Nach Satz 4.12 existieren minimale projektive Auflösungen: Man konstruiert sie wie folgt. Sei $P_0 \overset{\varepsilon}{\twoheadrightarrow} M$ eine projektive Hülle von M, $P_1 \twoheadrightarrow \ker\varepsilon$ eine projektive Hülle von $\ker\varepsilon$, etc. Minimale injektive Auflösungen erhält man analog, indem man sukzessive injektive Hüllen konstruiert. Damit hat man das folgende Resultat:

Satz 4.14. *Ist $M \in kG$-**mod**, dann besitzt M eine minimale projektive und eine minimale injektive Auflösung.*

Bemerkung. Sei $P_* \twoheadrightarrow M$ und $Q_* \twoheadrightarrow M$ zwei projektive Auflösungen von M, erstere minimal. Nach Definition ist dann für jedes n der Modul P_n ein direkter Summand von Q_n, man hat $\mu'_n\mu_n = 1_{P_n}$.

Definition. Sei $P_* \overset{\varepsilon}{\twoheadrightarrow} M$ eine minimale projektive Auflösung und $M \overset{\theta}{\hookrightarrow} I_*$ eine minimale injektive Auflösung von M. Dann definieren wir für $n > 0$

$$\Omega^n(M) := \ker\partial_{n-1} = \operatorname{im}\partial_n \cong \operatorname{coim}\partial_n = \operatorname{cok}\partial_{n+1}$$

(mit $\ker\partial_0 := \ker\varepsilon$). Zur Abkürzung schreiben wir $\Omega(M)$ für $\Omega^1(M)$. Ausserdem sei

$$\Omega^{-n}(M) := \operatorname{cok}\partial^{n-1} = \operatorname{coim}\partial^n \cong \operatorname{im}\partial^n = \ker\partial^{n+1}$$

(mit $\operatorname{cok}\partial^0 := \operatorname{cok}\theta$). Und

$$\Omega^0(M) := \Omega^{-1}(\Omega(M))\,.$$

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P_2 \arrow[rr, "\partial_2"] \arrow[dr] & & P_1 \arrow[rr, "\partial_1"] \arrow[dr] & & P_0 \arrow[r, "\varepsilon"] & M \arrow[rr] & & 0 & \\
& & \Omega^2(M) \arrow[ur] & & \Omega(M) \arrow[ur] \arrow[d, equal] & & & & & \\
& & 0 \arrow[rr] & & \Omega(M) \arrow[r, "\widetilde{\theta}"] & \widetilde{I}_0 \arrow[rr, "\widetilde{\partial}^1"] \arrow[dr] & & \widetilde{I}_1 \arrow[rr, "\widetilde{\partial}^2"] \arrow[dr] & & \widetilde{I}_2 \\
& & & & & & \Omega^{-1}(\Omega(M)) \arrow[ur] & & \Omega^{-2}(\Omega(M)) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

(In der obersten Zeile stehe eine minimale projektive Auflösung $P_* \overset{\varepsilon}{\twoheadrightarrow} M$ von M und in der dritten Zeile eine minimale injektive Auflösung $\widetilde{\theta}\colon \Omega(M) \hookrightarrow \widetilde{I}_*$ von $\Omega(M)$.)

Bemerkung. Es gilt $M \cong \Omega^0(M) \oplus (\text{proj})$:

man betrachtet folgendes Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
\Omega(M) \arrow[r, hook] \arrow[d, equal] & P_0 = P_M \arrow[r, two heads, "\varphi"] \arrow[d, shift left, "p"] & M \arrow[d, dotted, shift left, "\overline{p}"] \\
\Omega(M) \arrow[r, hook] & \widetilde{I}_0 \arrow[r, two heads, "\psi"] \arrow[u, shift left, "i"] & \Omega^0(M) \arrow[u, dotted, shift left, "\overline{i}"]
\end{tikzcd}$$

wobei $\widetilde{I}_0$ die injektive Hülle von $\Omega(M)$ ist und P_0 die projektive Hülle von M. (P_M ist das Pullback vom Paar $(\psi, \overline{p})$, siehe Abschnitt 2.6). Man erhält: $p \circ i = 1_{\widetilde{I}_0}$ und dann $\overline{p} \circ \overline{i} = 1_{\Omega^0(M)}$ (beachte: es ist $\psi = \overline{p}\varphi i = \overline{p}\overline{i}\psi$ und da ψ surjektiv ist, folgt, dass $\overline{p}\overline{i}$ die Identiät auf $\Omega^0(M)$ ist.

Nach dem Lemma von Schanuel (Lemma 4.13) sind die Moduln $\Omega^n(M)$ (bis auf Isomorphie) wohldefiniert. Wenn wir die Voraussetzung “minimal” in der Definition von $\Omega^n(M)$ weglassen, erhalten wir Moduln von der Form $\Omega^n(M) \oplus (\text{proj})$.

Sind $P_* \overset{\varepsilon}{\twoheadrightarrow} M$ eine minimale projektive Auflösung und $M \overset{\theta}{\hookrightarrow} I_*$ eine minimale injektive Auflösung von M, so können wir sie zu einer minimalen vollständigen Auflösung von M zusammenkleben:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P_1 \arrow[rr, "\partial_1"] \arrow[dr] & & P_0 \arrow[rr, "\partial_0"] \arrow[dr, "\varepsilon"'] & & P_{-1} \arrow[rr, "\partial_{-1}"] \arrow[dr] & & P_{-2} \arrow[r] & \cdots \\
& & \Omega^1(M) \arrow[ur] & & M \arrow[ur, "\theta"'] & & \Omega^{-1}(M) \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

wobei $P_{-n} := I_{-(n-1)}$ sei und $\partial_{-n} := \partial^n$ für $n > 0$, und $\partial_0 := \theta\,\varepsilon$.

Die Moduln $\Omega^n(M)$ haben folgende Eigenschaften:

Lemma 4.15. *Seien M, $N \in kG$-**mod**, $H \subset G$ eine Untergruppe, $L \in kH$-**mod** und $n, m \in \mathbb{Z}$. Dann gelten:*

(i) $\Omega^n\,(\mathrm{proj}) = 0$,

(ii) $\Omega^n(M)$ *hat keine projektiven Untermoduln* $\neq 0$,

(iii) $\Omega^n(M \oplus N) = \Omega^n(M) \oplus \Omega^n(N)$,

(iv) $\Omega^n(M)^* \cong \Omega^{-n}(M^*)$,

(v) $\Omega^n(\Omega^m(M)) = \Omega^{n+m}(M)$,

(vi) $\Omega^n(M) \otimes \Omega^m(N) \cong \Omega^{n+m}(M \otimes N) \oplus (\mathrm{proj})$,

(vii) $\Omega^n(M){\downarrow_H} \cong \Omega^n(M{\downarrow_H}) \oplus (\mathrm{proj})$,

(viii) $\Omega^n(L){\uparrow^G} \cong \Omega^n(L{\uparrow^G}) \oplus (\mathrm{proj})$.

Wegen (iv) (für $n > 0$) und der Definition von Ω^0 können wir annehmen, dass m und n positive Zahlen sind.

Beweis. Dies ist Proposition 4.4 in [C].
(i) und (ii) sind klar. (iii) folgt aus (ii) zusammen mit Schanuels Lemma (Lemma 4.13), (iv) gilt wegen der Dualität. (v) folgt, indem man eine minimale projektive Auflösung von M zu einer minimalen projektiven Auflösung von $\Omega^m(M)$ verkürzt. (vii) und (viii) folgen, da Restriktion einer minimalen projektiven Auflösung von M eine (nicht unbedingt minimale) projektive Auflösung des eingeschränkten Moduls $M{\downarrow_H}$ bringt und da für eine minimale projektive Auflösung $Q_* \overset{\theta}{\twoheadrightarrow} L$ von L wir mit $kG \otimes_{kH} Q_* \overset{1\otimes\theta}{\twoheadrightarrow} kG \otimes_{kH} L = L{\uparrow^G}$ eine projektive Auflösung von $L{\uparrow}G$ erhalten (die ebenso nicht unbedingt minimal ist).
(vi) braucht etwas mehr. ☐

Die Eigenschaften von Ω^n sind also oft beschrieben bis auf direkte Summe mit projektiven Moduln. Damit kommen wir zum nächsten Abschnitt - der stabilen Modulkategorie. Dies führt dann zu triangulierten Kategorien.

Vorher zur Erinnerung: ist M in kG-**mod** und $P_* \to M$ eine projektive Auflösung von M, so können wir $\mathrm{Hom}_{kG}(-, N)$ auf P_* anwenden. Dies gibt den Komplex

$$0 \to \mathrm{Hom}_{kG}(P_0, N) \to \mathrm{Hom}_{kG}(P_1, N) \to \dots\,.$$

Der Funktor Ext^n_{kG} misst die Exaktheit dieser Folge, i.e.

$$\mathrm{Ext}^n_{kG}(M, N) = H^n(\mathrm{Hom}_{kG}(P_*, N))\,.$$

Definition. Die *Cohomologie von G mit Koeffizienten in N* ist der Spezialfall $M = k$ (der triviale kG-Modul). Man schreibt

$$H^n(G, N) := \mathrm{Ext}^n_{kG}(k, N)\,.$$

Aus Teil 1 wissen wir, dass der Ext-Funktor nicht von der Wahl der projektiven Auflösung abhängt. Ausserdem ist

$$\mathrm{Ext}^n_{kG}(M, N) \cong H^n(\mathrm{Hom}_{kG}(M, I_*))\,,$$

wobei $N \hookrightarrow I_*$ eine injektive Auflösung von N ist (dem Modul im zweiten Argument). Es gibt also zwei Möglichkeiten: entweder benutzt man eine injektive Auflösung des Moduls im zweiten Argument und nimmt die Cohomologiegruppen der $\mathrm{Hom}_{kG}(M, I_n)$ (kovarianter Hom-Funktor) oder man nimmt eine projektive Auflösung des Moduls im ersten Argument und die Cohomologiegruppen der $\mathrm{Hom}_{kG}(P_n, N)$ (kontravarianter Hom-Funktor). Dies wurde im Abschnitt 2.6 besprochen.

Kapitel 5

Triangulierte Kategorien

5.1 Stabile Kategorie

Es gibt gewisse natürliche Rahmen, in die man Cohomologietheorien stellen kann. Z.B. verschiedene derivierte Kategorien. Wir benutzen hier die stabile (Modul-) Kategorie. Sie hat den Vorteil, dass sie sehr ähnlich ist wie die Modulkategorie.

Vor der Definition der stabilen Kategorie noch eine wichtige Beobachtung:

Notation. Man sagt, die Abbildung $M \overset{\alpha}{\to} N$ *faktorisiert durch einen projektiven Modul*, falls ein projektiver Modul P existiert und Abbildungen $\varepsilon : M \to P$, $\psi : P \to N$, so dass $\alpha = \psi\,\varepsilon$ ist:

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, "\varepsilon"'] & & N \\
& P \arrow[ur, "\psi"'] &
\end{tikzcd}$$

Lemma 5.1. *Faktorisiert die Abbildung $M \xrightarrow{\alpha} N$ durch einen projektiven Modul, so faktorisiert sie durch jede injektive Abbildung von M in einen projektiven Modul und auch durch jede surjektive Abbildung eines projektiven Moduls auf N.*

$$\begin{tikzcd}
& & M \arrow[dll] \arrow[dl, hook] \arrow[dr, dotted] \arrow[dd, bend left, "\alpha"] & \\
P \arrow[drr] & Q_1 \arrow[dr, dotted] & & Q_2 \arrow[dl] \\
& & N &
\end{tikzcd}$$

Beweis. Proposition 4.6 in [C]. □

Definition. Wir bezeichnen mit kG-$\underline{\mathbf{mod}}$ die Kategorie aller endlich erzeugten links kG-Moduln modulo projektiven, genannt die *stabile Kategorie*. Die Objekte von kG-$\underline{\mathbf{mod}}$ sind dieselben wie die Objekte von kG-$\mathbf{mod}$. Sind M und N in kG-$\mathbf{mod}$, so sei

$\mathrm{PHom}_{kG}(M,N) \subset \mathrm{Hom}_{kG}(M,N)$ der Unterraum aller kG-Modulhomomorphismen, die durch projektive Moduln faktorisieren. Dann definieren wir

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{kG}(M,N) := \mathrm{Hom}_{kG-\underline{\mathbf{mod}}}(M,N) := \mathrm{Hom}_{kG}(M,N)/\,\mathrm{PHom}_{kG}(M,N)$$

Man kann überprüfen, dass kG-$\underline{\mathbf{mod}}$ eine Kategorie ist. Wir haben dann den natürlichen Funktor kG-**mod** $\to$ kG-$\underline{\mathbf{mod}}$, der auf den Objekten die Identität ist und der Morphismen auf die Nebenklassen modulo der entsprechenden $P\,\mathrm{Hom}_{kG}$-Unterräumen projiziert.

Man hat in dieser Notation

Satz 5.2. *Seien M, N in kG-**mod**. Dann ist*

$$\mathrm{Ext}^n_{kG}(M,N) \cong \underline{\mathrm{Hom}}_{kG}(\Omega^n(M), N)$$

für jedes $n > 0$.

Beweis. Das ist Theorem 4.5 (ii) in [C]. ☐

Notation. Seien P_* und Q_* nicht-negative Komplexe von Moduln (i.e. $P_n = Q_n = 0$ für alle $n < 0$) mit Derivationen ∂^P_n und ∂^Q_n. Sind μ_* und ν_* zwei Kettenabbildungen von P_* nach Q_*, so sagt man, μ_* und ν_* sind *homotop in positiven Graden*, falls eine Homotopie $s_i : P_i \to Q_{i+1}$ existiert, so dass

$$\mu_i - \nu_i = s_{i-1} \circ \partial^P_i + \partial^Q_{i+1} \circ s_i \quad \text{für alle } i > 0.$$

$$\begin{tikzcd}
P_{i+1} \arrow[r, "\partial^P_{i+1}"] \arrow[d, shift right, "\mu_{i+1}"'] \arrow[d, shift left, "\nu_{i+1}"] & P_i \arrow[r, "\partial^P_i"] \arrow[d, shift right, "\mu_i"'] \arrow[d, shift left, "\nu_i"] \arrow[dl, "s_i"'] & P_{i-1} \arrow[d, shift right, "\mu_{i-1}"'] \arrow[d, shift left, "\nu_{i-1}"] \arrow[dl, "s_{i-1}"'] \\
Q_{i+1} \arrow[r, "\partial^Q_{i+1}"] & Q_i \arrow[r, "\partial^Q_i"] & Q_{i-1}
\end{tikzcd}$$

Wir schreiben $\mathcal{C}(P_*, Q_*)$ für die Klasse der Kettenabbildungen $\nu_* : P_* \to Q_*$ unter der Äquivalenzrelation der Homotopie in positiven Graden.

Lemma 5.3. *Sind $P_* \overset{\varepsilon}{\twoheadrightarrow} M$ und $Q_* \overset{\theta}{\twoheadrightarrow} N$ projektive Auflösungen der Module M, N $\in$ kG-**mod**, so existiert für jedes $n \in \mathbb{Z}$ natürliche Isomorphismen*

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{kG}(M,N) \cong \mathcal{C}(P_*, Q_*) \cong \underline{\mathrm{Hom}}_{kG}(\Omega^n(M), \Omega^n(N))\,.$$

Beweis. Wir erklären, wie man die Abbildungen konstruiert. Ohne Einschränkung sei $n > 0$.
(Für die andern Fälle: $\underline{\mathrm{Hom}}_{kG}(M,N) \cong \underline{\mathrm{Hom}}_{kG}(\Omega^0(M), \Omega^0(N))$ ist klar.)
$\underline{\mathrm{Hom}}_{kG}(\Omega^{-n}(M), \Omega^{-n}(N)) \cong \underline{\mathrm{Hom}}_{kG}(\Omega^n(M^*)^*, \Omega^n(N^*)^*)$ nach Lemma 4.15. Und dies ist $\underline{\mathrm{Hom}}_{kG}(\Omega^n(N^*), \Omega^n(M^*))$ nach Korollar 3.20. Hat man die Behauptung für positive n, so ist dies gerade $\underline{\mathrm{Hom}}_{kG}(N^*, M^*)$ und nach Korollar 3.20 ist das $\underline{\mathrm{Hom}}_{kG}(M,N)$ wie gewünscht.)

A) “$\underline{\mathrm{Hom}}_{kG}(M,N) \to \mathcal{C}(P_*,Q_*)$”:

Sei $\xi \in \underline{\mathrm{Hom}}_{kG}(M,N)$. Dann kann jeder Repräsentant $\alpha \in \mathrm{Hom}_{kG}(M,N)$ von ξ zu einer Kettenabbildung $\mu_* : P_* \to Q_*$ hochgehoben werden. Ist $\beta \in \mathrm{Hom}_{kG}(M,N)$ ein anderer Repräsentant von ξ, so faktorisiert die Differenz $\alpha - \beta$ durch einen projektiven Modul. Sei $\nu_* : P_* \to Q_*$ eine Hochhebung von β. Wir haben dann ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P_1 \arrow[r, "\partial_1^P"] \arrow[d, "\mu_1-\nu_1"'] & P_0 \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "\mu_0-\nu_0"'] \arrow[dl] & M \arrow[r] \arrow[d, "\alpha-\beta"] \arrow[dl] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & Q_1 \arrow[r, "\partial_1^Q"] & Q_0 \arrow[r, "\theta"] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Da $\alpha - \beta$ durch einen projektiven Modul faktorisiert, faktorisiert diese Abbildung durch Q_0 (nach Lemma 5.1). Also können wir schreiben $\theta \circ s_{-1} = \alpha - \beta$ (für eine Abbildung $s_{-1} : M \to Q_0$). Wegen der Kommutativität des Diagramms erhalten wir $\theta \circ (\mu_0 - \nu_0 - s_{-1}\,\varepsilon) = 0$, also ist $\mathrm{im}(\mu_0 - \nu_0 - s_{-1}\,\varepsilon)$ in $\ker\theta = \mathrm{im}\,\partial_1^Q$ enthalten. Da P_0 projektiv ist, faktorisiert $\mu_0 - \nu_0 - s_{-1} \circ \varepsilon$ durch Q_1, sagen wir

$$\mu_0 - \nu_0 = s_{-1} \circ \varepsilon + \partial_1^Q \circ s_0 \,.$$

für ein $s_0 : P_0 \to Q_1$.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P_1 \arrow[r, "\partial_1^P"] \arrow[d, "\mu_1-\nu_1"'] & P_0 \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "\mu_0-\nu_0"'] \arrow[dl, "s_0"'] & M \arrow[r] \arrow[d, "\alpha-\beta"] \arrow[dl, "s_{-1}"'] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & Q_1 \arrow[r, "\partial_1^Q"] & Q_0 \arrow[r, "\theta"] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Wir können das Verfahren so fortsetzen, indem wir die Projektivität der P_n und die Exaktheit der unteren Zeile ausnutzen. Damit erhalten wir $s_n : P_n \to Q_{n+1}$ mit

$$\mu_n - \nu_n = s_{n-1} \circ \partial_n^P + \partial_{n+1}^Q \circ s_n$$

für $n > 0$. Also haben wir eine Abbildung $\underline{\mathrm{Hom}}_{kG}(M,N) \to \mathcal{C}(P_*,Q_*)$ konstruiert.

B) “$\mathcal{C}(P_*,Q_*) \to \underline{\mathrm{Hom}}_{kG}(\Omega^n(M),\Omega^n(N))$”:

Sei $\nu \in \mathcal{C}(P_*,Q_*)$. Dann lässt sich jede Kettenabbildung $\mu_* : P_* \to Q_*$, die ν repräsentiert, einschränken zu Abbildungen

$$\Omega^n(M) \oplus (\mathrm{proj}) \cong \ker \partial_{n-1}^P \xrightarrow{\mu'_{n-1}} \ker \partial_{n-1}^Q \cong \Omega^n(N) \oplus (\mathrm{proj}) \,.$$

Ist $\nu_* : P_* \to Q_*$ ein weiterer Repräsentant von ν, so sind μ_* und ν_* homotop in positiven Graden. I.e. $\mu_{n-1} - \nu_{n-1} = s_{n-2} \circ \partial + \partial \circ s_{n-1}$ für $n > 1$. Also faktorisiert die Differenz der Einschränkungen $\mu'_{n-1} - \nu'_{n-1} = \partial \circ s_{n-1}$ durch den projektiven Modul Q_n. Das gibt eine Abbildung $\mathcal{C}(P_*,Q_*) \to \underline{\mathrm{Hom}}_{kG}(\Omega^n(M),\Omega^n(N))$ für $n > 1$.

C) "$\underline{\mathrm{Hom}}_{kG}(\Omega^n(M), \Omega^n(N)) \to \underline{\mathrm{Hom}}_{kG}(M, N)$":

In ähnlicher Weise (wie im Teil B)) kann man $\underline{\mathrm{Hom}}_{kG}(\Omega^n(M), \Omega^n(N))$ abbilden auf die Menge der Homotopieklassen in negativen Graden von einer beliebigen injektiven Auflösung von $\Omega^n(M)$ in eine beliebige injektive Auflösung von $\Omega^n(N)$. Diese wiederum wird abgebildet auf $\underline{\mathrm{Hom}}_{kG}(\Omega^{-m}(\Omega^n(M)), \Omega^{-m}(\Omega^n(N))$ für $m > 1$ nach Teil B). Ist insbesondere $m = n$, so haben wir $\Omega^{-n}(\Omega^n(M)) \cong M$ und $\Omega^{-n}(\Omega^n(N)) \cong N$ in kG-$\underline{\textbf{mod}}$. Damit haben wir eine Abbildung $\underline{\mathrm{Hom}}_{kG}(\Omega^n(M), \Omega^n(N)) \to \underline{\mathrm{Hom}}_{kG}(M, N)$.

□

Lemma 5.4. *Sei $M \overset{\alpha}{\to} N$ ein Morphismus in kG-**mod**. Dann existieren projektive Moduln P, Q und Moduln L, L' in kG-**mod**, so dass man exakte Folgen*

$$0 \to M \overset{\alpha'}{\to} N \oplus Q \overset{\gamma}{\to} L' \to 0 \quad \textit{und} \quad 0 \to L \overset{\beta}{\to} M \oplus P \overset{\alpha''}{\to} N \to 0$$

hat mit $\mathrm{pr}_N \circ \alpha' \equiv \alpha'' \,|_M \equiv \alpha \mod \mathrm{PHom}_{kG}(M, N)$, wobei pr_N die Projektion auf N sei. Wir können ausserdem annehmen, dass $L \cong \Omega(L') \oplus (\mathrm{proj})$ ist.

Beweis. Sei $\ker \alpha \hookrightarrow Q$ eine injektive Hülle von $\ker \alpha$. Wir haben also ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\ker \alpha \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & M \arrow[dl, "\theta"'] \\
Q &
\end{tikzcd}$$

Da die Abbildung $\alpha' := \begin{pmatrix} \alpha \\ \theta \end{pmatrix} : M \to N \oplus Q$ injektiv ist, erhalten wir eine kurze exakte Folge

$$0 \to M \overset{\alpha'}{\to} N \oplus Q \overset{\gamma}{\to} L' \to 0$$

mit $L' := \operatorname{cok} \alpha'$.

Sei $P' \twoheadrightarrow L'$ eine projektive Hülle von L'. Dann haben wir folgendes kommutierende Diagramm mit exakten Zeilen:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Omega(L') \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\varphi"] & P' \arrow[r] \arrow[d, "\psi"] & L' \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "\alpha'"] & N \oplus Q \arrow[r] & L' \arrow[r] & 0\,,
\end{tikzcd}$$

die Abbildung ψ existiert wegen der Projektivität von P' und φ ist induziert durch ψ. Also haben wir eine Folge

$$0 \to \Omega(L') \xrightarrow{\begin{pmatrix} \varphi \\ \mu \end{pmatrix}} M \oplus P' \xrightarrow{\alpha' - \psi} N \oplus Q \to 0\,, \tag{5.1}$$

die exakt ist (wie man nachprüfen kann - Übung!).

Nun spalten wir den projektiven Modul Q ab. Das bedeutet, dass wir allenfalls einen projektiven Summanden von M abspalten müssen (und damit entsprechend P' ersetzen durch P!). Um M wieder zu erhalten, fügen wir diesen projektiven Summanden zu $\Omega(L')$ hinzu, also $L = \Omega(L') \oplus (\text{proj})$. □

Übung: die Folge (5.1) ist exakt.

Lemma 5.5. *Seien C_* und D_* nicht-negative Kettenkomplexe und $\mu_* : C_* \to D_*$ eine Kettenabbildung. Dann existiert ein total zerfallender, nicht-negativer Kettenkomplex D'_* von projektiven Moduln und eine Kettenabbildung $\mu'_* : C_* \to D'_*$, so dass die Abbildung*

$$\begin{pmatrix} \mu_* \\ \mu'_* \end{pmatrix} : C_* \to D_* \oplus D'_*$$

injektiv ist.

Beweis. Das ist Lemma 5.4 in [C]. □

Bemerkung. Lemma 5.5 gibt es in verschiedenen Variationen. Unter denselben Voraussetzungen gibt es beispielsweise einen total zerfallenden Komplex C'_* von projektiven Moduln und eine Kettenabbildung $\mu'_* : C'_* \to D_*$, so dass

$$(\mu_*, \mu'_*) : C_* \oplus C'_* \to D_*$$

surjektiv ist. (Man muss hier allenfalls $C'_{-1} = 0$ ergänzen).

Beweis. Übung. □

Lemma 5.6. *Die Isomorphieklassen von β, γ und L (und L') in kG-$\underline{\mathbf{mod}}$ aus Lemma 5.4 sind eindeutig bestimmt durch die Klasse von $\alpha \in kG$-$\underline{\mathbf{mod}}$.*

Beweis. Proposition 5.5 [C]. □

[Vorlesung 12, 30.6.2014]

Bemerkung. Die Kategorie kG-**mod** ist abelsch, die stabile Modulkategorie kG-$\underline{\mathbf{mod}}$ jedoch nicht: Kerne und Cokerne existieren i.a. nicht. Anstelle der Existenz von Kernen und Cokernen haben wir die Tatsache, das für jede Abbildung in kG-$\underline{\mathbf{mod}}$ ein eindeutig definiertes Objekt (bis auf Isomorphie), das in einem *Dreieck (mit Morphismen)* das dritte Objekt ist. Dank dieser Eigenschaft ist kG-$\underline{\mathbf{mod}}$ eine sogenannte triangulierte Kategorie.

5.2 Triangulierte Kategorien

Triangulierte Kategorien wurden von Verdier 1963 eingeführt (Cohomologie Étale, P. Deligne, Lecture Notes in Mathematics 569, 1977, Seiten 262-311)

Notation. 1) Sei $\mathcal{C}$ eine additive Kategorie und $\mathcal{T}$ ein Automorphismus von $\mathcal{C}$. $\mathcal{T}$ heisst der *Verschiebungsfunktor*.

2) Ein *Dreieck in* $\mathcal{C}$, kurz $\triangle$, ist ein 6-Tupel $(U, V, W, \alpha, \beta, \gamma)$ von der Form

$$U \overset{\alpha}{\to} V \overset{\beta}{\to} W \overset{\gamma}{\to} \mathcal{T}U$$

Ein Dreieck wird auch folgendermassen geschrieben:

$$\begin{tikzcd} & W \arrow[dl, "\gamma"', "\bullet"' near end] & \\ U \arrow[rr, "\alpha"'] & & V \arrow[ul, "\beta"'] \end{tikzcd}$$

wobei der Punkt $\bullet$ hilft, sich zu erinnern, dass γ nach $\mathcal{T}U$ geht (in der Literatur wird das meist ohne $\bullet$ geschrieben- manchmal steht auch $+1$)!

3) Ein *Morphismus zwischen Dreiecken* $U \overset{\alpha}{\to} V \overset{\beta}{\to} W \overset{\gamma}{\to} \mathcal{T}U$ und $U' \overset{\alpha'}{\to} V' \overset{\beta'}{\to} W' \overset{\gamma'}{\to} \mathcal{T}U'$ ist ein Tripel von Abbildungen (f, g, h), so dass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"'] & V \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "g"'] & W \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "h"'] & \mathcal{T}U \arrow[d, "\mathcal{T}f"'] \\ U' \arrow[r, "\alpha'"] & V' \arrow[r, "\beta'"] & W' \arrow[r, "\gamma'"] & \mathcal{T}U' \end{tikzcd}$$

Sind die Abbildungen f, g, h Isomorphismen in $\mathcal{C}$, so sagt man, der Morphismus ist ein *Isomorphismus von Dreicken.*

Bemerkung. Es gibt auch sogenannte *ausgezeichnete* Dreiecke (*distinguished triangles*). Wir werden diese am Beispiel der Homotopie-Kategorie definieren, cf. Abschnitt 5.4. Die Definition einer triangulierten Kategorie mittels einer Kollektion von Dreiecken und den Axiomen (TR1) bis (TR4) (sie Definition hier unten) wird oft alternativ dazu mittels ausgezeichneten Dreiecken (für die Kollektion von Dreiecken) und den Axiomen (TR1') bis (TR4') (wie in Satz 5.12) durchgeführt. Beide Definitionen sind äquivalent!

Definition. Eine *triangulierte Kategorie* ist eine additive Kategorie $\mathcal{C}$ zusammen mit einem Verschiebungsfunktor $\mathcal{T}$ und einer Kollektion von Dreiecken, die folgende Axiome erfüllen.

(TR1) Jedes 6-Tupel, das isomorph ist zu einem Dreieck ist ein Dreieck. Jeder Morphismus $\alpha : U \to V$ kann in einen eindeutig bestimmtes Dreieck $(U, V, W, \alpha, \beta, \gamma)$ eingebettet werden. Das 6-Tupel $(U, U, 0, \mathrm{id}_U, 0, 0)$ ist ein Dreieck.

$$\begin{tikzcd}
& 0 \arrow[dl, "0"', "\bullet"' near end] & \\
U \arrow[rr, "\mathrm{id}_U"'] & & U \arrow[ul, "0"']
\end{tikzcd}$$

(TR2) (Rotation) Ist $(U, V, W, \alpha, \beta, \gamma)$ ein Dreieck, so sind auch $(V, W, \mathcal{T}U, \beta, \gamma, -\mathcal{T}\alpha)$ und $(\mathcal{T}^{-1}W, U, V, -\mathcal{T}^{-1}\gamma, \alpha, \beta)$ Dreiecke.

$$\begin{tikzcd}
& W \arrow[dl, "\gamma"', "\bullet"' near end] & \\
U \arrow[rr, "\alpha"'] & & V \arrow[ul, "\beta"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& \mathcal{T}U \arrow[dl, "-\mathcal{T}\alpha"', "\bullet"' near end] & \\
V \arrow[rr, "\beta"'] & & W \arrow[ul, "\gamma"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& V \arrow[dl, "\beta"', "\bullet"' near end] & \\
\mathcal{T}^{-1}W \arrow[rr, "-\mathcal{T}^{-1}\gamma"'] & & U \arrow[ul, "\alpha"']
\end{tikzcd}$$

(TR3) Seien $(U, V, W, \alpha, \beta, \gamma)$ und $(U', V', W', \alpha', \beta', \gamma')$ zwei Dreiecke und $f : U \to U'$, $g : V \to V'$ Morphismen, so dass $\alpha' f = g\alpha$. Dann existiert ein Morphismus $h : W \to W'$, so dass $\beta' g = h\beta$ und $\gamma' h = \mathcal{T}f \circ \gamma$. (Das Tripel (f, g, h) ist also ein Morphismus von Dreiecken).

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"'] & V \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "g"'] & W \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, dotted, "h"'] & \mathcal{T}U \arrow[d, "\mathcal{T}f"'] \\
U' \arrow[r, "\alpha'"] & V' \arrow[r, "\beta'"] & W' \arrow[r, "\gamma'"] & \mathcal{T}U'
\end{tikzcd}$$

(TR4) (Oktaeder-Axiom) Hat man Dreiecke $(U, V, W, \alpha, \beta, \gamma)$, $(V, W', U', \mu, \nu, \theta)$ und $(U, W', V', \mu\alpha, \tau, \rho)$, so existiert ein Dreieck $(W, V', U', f, g, \mathcal{T}\beta \circ \theta)$, so dass $g\tau = \nu$, $\rho f = \gamma$, $f\beta = \tau\mu$ und $\mathcal{T}\alpha \circ \rho = \theta g$.
Mit andern Worten: das folgende Diagramm kommutiert und die dritte Spalte ist ein Dreieck:

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, equal] & V \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\mu"] & W \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, dotted, "f"] & \mathcal{T}U \arrow[d, equal] \\
U \arrow[r, "\mu\alpha"] & W' \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "\nu"] & V' \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, dotted, "g"] & \mathcal{T}U \\
V' \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\rho"] & U' \arrow[r, equal] \arrow[d, "\theta"] & U' \arrow[d, "\mathcal{T}\beta\circ\theta"] & \\
\mathcal{T}U \arrow[r, "\mathcal{T}\alpha"] & \mathcal{T}V \arrow[r, "\mathcal{T}\beta"] & \mathcal{T}W &
\end{tikzcd}$$

(dabei ist die Abbildung $\mathcal{T}\beta \circ \theta$ durch die Daten gegeben - die Existenz von f und g wird verlangt).

Alternativ dazu kann man das Oktaeder-Axiom folgendermassen darstellen:

$$\begin{tikzcd}
& & V' \arrow[ddll, "\bullet"] \arrow[drr, dotted] & & \\
W \arrow[urr, dotted, "\bullet"] \arrow[d, "\bullet"'] & & & & U' \arrow[llll, "\bullet"'] \arrow[ddll, "\bullet"] \\
U \arrow[rrrr] \arrow[drr] & & & & W' \arrow[u] \arrow[uull] \\
& & V \arrow[uull] \arrow[urr] & &
\end{tikzcd}$$

wobei alle Dreiecke wie oben kommutieren sollen und auch die folgenden Quadrate:

$$\begin{tikzcd}
& V' & \\
W \arrow[ur, dotted] & & W' \arrow[ul] \\
& V \arrow[ul] \arrow[ur, "\mu"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& V' \arrow[dl, "\bullet"'] \arrow[dr, dotted] & \\
U \arrow[dr, "\alpha"'] & & U' \arrow[dl, "\bullet"] \\
& V &
\end{tikzcd}$$

oder so:

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[dr, "\bullet"'] \arrow[ddrr, dotted, bend right, "\exists f"'] & & V \arrow[ll] \arrow[dr, "\mu"] & & U' \arrow[ll, "\bullet"'] \arrow[llll, bend right, "\bullet"'] \\
& U \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[rr, "\mu\alpha"'] & & W' \arrow[ur] \arrow[dl] & \\
& & V' \arrow[ul, "\bullet"] \arrow[uurr, dotted, bend right, "\exists g"'] & &
\end{tikzcd}$$

mit kommutativen Dreiecken und Quadraten wie bisher.

Am letzten Bild kann man sich vorstellen, warum das Axiom nach dem Oktaeder benannt ist: wenn wir U mit $\mathcal{T}U$ identifizieren, V mit $\mathcal{T}V$ etc., so erhalten wir ein Diagramm, das wie ein Oktaeder aussieht[1]. Vier der Seiten sind Dreiecke. Das Axiom 4 sagt, dass je zwei Pfade mit selbem Start und Ende gleich sind.

Man kann sich das Oktaeder auch am ersten Bild vorstellen: Wenn man das mittlere obere Quadrat

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\mu"] & W \arrow[d, "f"] \\
W' \arrow[r, "\tau"] & V'
\end{tikzcd}$$

---

[1] Wir haben 7 gegen innen begrenzte Dreiecke und eins durch die drei äusseren Kanten

nimmt und die Dreicke links und rechts davon runterklappt, so erhält man eine umgekehrte vierseitige Pyramide mit U als Spitze (unten). Klappt man die zwei Dreiecke

$$\begin{tikzcd}
W' \arrow[rr, "\tau"] \arrow[dr] & & V' \arrow[dl, "g"] \\
& U' \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\mathcal{T}V \arrow[rr, "\tau\beta"] & & \mathcal{T}W
\end{tikzcd}$$

unterhalb des Quadrates hoch und klebt die unterste Seite davon an $V \to W$, so erhält man eine Pyramide mit Spitze U'.

Bemerkung. Ist $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie, so ist die beschränkte derivierte Kategorie $\mathcal{D}^b(\mathcal{A})$ der beschränkten Komplexe über $\mathcal{A}$ eine triangulierte Kategorie. Sei $\mathcal{A}$ die Kategorie A-**mod** der endlich erzeugten links-A-Moduln (A eine endlich-dimensionale Algebra über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k). In diesem Fall kann die Kategorie $\mathcal{D}^b(A) := \mathcal{D}^b(A\text{-}\mathbf{mod})$ mit einer gewissen Homotopiekategorie identifiziert werden. Dazu kommen wir ev. später.

Satz 5.7. *Die stabile Modulkategorie kG-$\underline{\mathbf{mod}}$ ist eine triangulierte Kategorie mit Verschiebungsfunktor $\mathcal{T} = \Omega^{-1}$. Das 6-Tupel $(U, V, W, \alpha, \beta, \gamma)$ ist ein Dreieck genau dann, wenn es exakte Folgen*

$$0 \to U \xrightarrow{\alpha'} V \oplus (\text{proj}) \xrightarrow{\beta'} W \longrightarrow 0$$

und

$$0 \to V \xrightarrow{\beta''} W \oplus (\text{proj}) \xrightarrow{\gamma'} \Omega^{-1}(U) \longrightarrow 0$$

*gibt in kG-**mod**, so dass $[\alpha']$ gleich α ist*[2]*, $[\beta'] = [\beta''] = \beta$ und $[\gamma'] = \gamma$.*

Beweis. Axiom 1 folgt mit Lemmata 5.4 und 5.6. Axiom 2 ist auch eine Folge von Lemma 5.4. Axiom 3 folgt aus den Definitionen. Axiom 4: ist mühsam, nachzuprüfen. Exemplarisch betrachten wir einen Spezialfall. Sei $A \subset B \subset C$ und $U = A$, $V = B$, $W = B/A$, $W' = C$, $V' = C/A$, $U' = C/B$. Dann haben wir ein kommutatives Diagramm mit exakten

---

[2] $[\alpha']$ ist die Klasse von α' in kG-$\underline{\mathbf{mod}}$

Spalten und Zeilen

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & B \arrow[r] \arrow[d] & B/A \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] & C \arrow[r] \arrow[d] & C/A \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & C/B \arrow[r, equal] \arrow[d] & C/B \arrow[d] & \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Das Axiom sagt dann $C/B \cong (C/A)/(B/A)$. Diese Aussage wird oft der dritte Isomorphiesatz genannt. ☐

Nun noch ein paar Eigenschaften der stabilen Modulkategorie, als triangulierte Kategorie gesehen:

Lemma 5.8. *Ist* $(U, V, W, \alpha, \beta, \gamma)$ *ein Dreieck in* kG-$\underline{\mathbf{mod}}$ *und* M *aus* kG-$\mathbf{mod}$*, so ist* $(U \otimes M, V \otimes M, W \otimes M, \alpha \otimes_{1_M}, \beta \otimes 1_M, \gamma \otimes 1_M)$ *ein Dreieck in* kG-$\underline{\mathbf{mod}}$.

Beweis. Die Aussage folgt, da für einen projektive Moduln P in kG-$\mathbf{mod}$ und jedes $M \in$ kG-$\mathbf{mod}$ das Tensorprodukt auch projektiv ist, cf. Korollar 3.21 und mit Lemma 4.15 (vi) und der Definition von Dreiecken in Satz 5.7. ☐

Lemma 5.9. *Ist* $(U, V, W, \alpha, \beta, \gamma)$ *ein Dreieck in* kG-$\underline{\mathbf{mod}}$ *und* M *in* kG-$\mathbf{mod}$*, so gibt es lange exakte Folgen*

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{kG}(M,U) \xrightarrow{\alpha_*} \underline{\mathrm{Hom}}_{kG}(M,V) \xrightarrow{\beta_*} \underline{\mathrm{Hom}}_{kG}(M,W) \longrightarrow \tag{5.2}$$

$$\xrightarrow{\gamma_*} \mathrm{Ext}^1_{kG}(M,U) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{kG}(M,V) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{kG}(M,W)$$

$$\longrightarrow \mathrm{Ext}^2_{kG}(M,U) \longrightarrow \dots$$

und

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{kG}(W,M) \xrightarrow{\beta^*} \underline{\mathrm{Hom}}_{kG}(V,M) \xrightarrow{\alpha^*} \underline{\mathrm{Hom}}_{kG}(U,M) \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{\gamma^*} \mathrm{Ext}^1_{kG}(W,M) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{kG}(V,M) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{kG}(U,M)$$

$$\longrightarrow \mathrm{Ext}^2_{kG}(W,M) \longrightarrow \dots$$

(keine Nullen links!)

Beweis. Nach Satz 5.2 und Lemma 5.3 haben wir Isomorphismen
$\mathrm{Ext}^n_{kG}(M,U) \cong \underline{\mathrm{Hom}}_{kG}(M,\Omega^{-n}(U))$ und $\mathrm{Ext}^n_{kG}(W,M) \cong \underline{\mathrm{Hom}}_{kG}(\Omega^n(W),M)$. Wir zeigen die Existenz der langen exakten Folge

$$\ldots \xrightarrow{\Omega^2(\gamma)_*} \underline{\mathrm{Hom}}_{kG}(M,\Omega(U)) \xrightarrow{\Omega(\alpha)_*} \underline{\mathrm{Hom}}_{kG}(M,\Omega(V)) \xrightarrow{\Omega(\beta)_*} \underline{\mathrm{Hom}}_{kG}(M,\Omega(W)) \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{\Omega(\gamma)} \underline{\mathrm{Hom}}_{kG}(M,U) \xrightarrow{\alpha_*} \underline{\mathrm{Hom}}_{kG}(M,V) \xrightarrow{\beta_*} \underline{\mathrm{Hom}}_{kG}(M,W)$$

$$\xrightarrow{\gamma_*} \underline{\mathrm{Hom}}_{kG}(M,\Omega^{-1}(U)) \xrightarrow{\Omega^{-1}(\alpha)_*} \underline{\mathrm{Hom}}_{kG}(M,\Omega^{-1}(V)) \xrightarrow{\Omega^{-1}(\beta)_*} \ldots$$

die die erste Folge (Folge 5.2) oben nach links erweitert.

Nach Axiom 2 genügt es, zu zeigen, dass

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{kG}(M,\Omega^{-n}(U)) \overset{\Omega^{-n}(\alpha)_*}{\longrightarrow} \underline{\mathrm{Hom}}_{kG}(M,\Omega^{-n}(V)) \overset{\Omega^{-n}(\beta)_*}{\longrightarrow} \underline{\mathrm{Hom}}_{kG}(M,\Omega^{-n}(W))$$

exakt ist. Es ist $\mathrm{im}\,\Omega^{-n}(\alpha)_* \subset \ker \Omega^{-n}(\beta)_*$. Sei ζ ein Element vom Kern $\ker \Omega^{-n}(\beta)_*$. Die Zeilen des folgenden Diagramms definieren Dreiecke

$$\begin{tikzcd}
\Omega^n(M) \arrow[r] \arrow[d, "\Omega^n(\zeta)"'] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \Omega^{n-1}(M) \arrow[r, "-id_{\Omega^{n-1}(M)}"] & \Omega^{n-1}(M) \arrow[d, "\Omega^{n-1}(\zeta)"] \\
V \arrow[r, "\beta"] & W \arrow[r, "\gamma"] & \Omega^{-1}(U) \arrow[r, "-\Omega^{-1}(\alpha)"] & \Omega^{-1}(V)
\end{tikzcd}$$

Nach Axiom 3 existiert ein $\nu : \Omega^{n-1}(M) \to \Omega^{-1}(U)$ mit $\Omega^{-1}(\alpha) \circ \nu = \Omega^{n-1}(\zeta)$. Also ist $\zeta = \Omega^{-n}(\alpha) \circ \Omega^{-n+1}(\nu) \in \mathrm{im}\,\Omega^{-n}(\alpha)_*$.

Die Exaktheit der zweiten Folge kann man dual zeigen. ☐

Korollar 5.10. *Ist $(U,V,W,\alpha,\beta,\gamma)$ ein Dreieck in kG-$\underline{\mathbf{mod}}$, so ist $U \oplus W \cong V \oplus (\mathrm{proj})$ in kG-**mod**.*

Beweis. Man muss zeigen, dass die kurze exakte Folge

$$0 \to U \overset{\alpha'}{\longrightarrow} V \oplus (\mathrm{proj}) \overset{\beta'}{\longrightarrow} W \longrightarrow 0$$

aus Satz 5.7 zerfällt. Die entsprechende lange exakte Folge der Cohomologie sieht wie folgt aus:

$$\ldots \longrightarrow \mathrm{Hom}_{kG}(W,V \oplus (\mathrm{proj})) \xrightarrow{\beta'_*} \mathrm{Hom}_{kG}(W,W) \xrightarrow{\delta} \mathrm{Ext}^1_{kG}(W,U) \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{\alpha'_*} \mathrm{Ext}^1_{kG}(W,V \oplus (\mathrm{proj})) \longrightarrow \ldots$$

Die Zusammensetzung der Abbildung α'_* mit dem kanonischen Isomorphismus $\mathrm{Ext}^1_{kG}(W, V \oplus (\mathrm{proj}))) \overset{\cong}{\to} \mathrm{Ext}^1_{kG}(W, V)$ ist der Morphismus, der in der ersten der beiden langen exakten Folge (5.2) in Lemma 5.9 auftritt im Fall $M = W$. Lemma 5.9 zeigt für $\gamma = 0$ und $M = W$, dass α'_* injektiv ist. Also $\delta = 0$ und β'_* ist surjektiv. Dann ist $\theta \in \mathrm{Hom}_{kG}(W, V \oplus (\mathrm{proj}))$ mit $\mathrm{id}_W = \beta'_* \circ \theta = \beta\theta$ die gesuchte Abbildung für die Zerfällung. ☐

Bemerkung. Man könnte hier das sogenannte "cup-Produkt" der Gruppencohomologie definieren und diskutieren.

5.3 Beispiele von triangulierten Kategorien

Wir betrachten hier die Homotopiekategorie als Beispiel einer triangulierten Kategorie. Ziel ist, danach die derivierte Kategorie anzuschauen. Als Referenz für die Homotopiekategorie etc. kann man [KS] betrachten.

Sei A eine endlich dimensionale Algebra über $k = \overline{k}$ und A-**mod** die Kategorie der endlich erzeugten links A-Moduln.

Zur Erinnerung: ein Komplex X oder $X^\bullet$ von A-Moduln ist eine Sammlung von Morphismen d_X^n (oder einfach d_X) und Moduln

$$\cdots \to X^{n-1} \overset{d_X^{n-1}}{\to} X^n \overset{d_X^n}{\to} X^{n+1}$$

mit $d_X^n \circ d_X^{n-1} = 0$. Man sagt, dass $X^\bullet$ beschränkt ist, falls $X^n = 0$ ist für $|n| >> 0$. Dann sei $\mathcal{C}(A)$ die (additive) Kategorie der Komplexe von A-Moduln[3] und $\mathcal{C}^b(A)$ die Kategorie der beschränkten Komplexe von A-Moduln. (Und $\mathcal{C}^+(A)$ die Kategorie der von unten beschränkten Komplexe von A-Moduln, i.e. die links beschränkten Komplexe, $\mathcal{C}^-(A)$ die Kategorie der von oben (i.e. rechts) beschränkten Komplexe von A-Moduln). Ein Morphismus zwischen $X^\bullet$ und $Y^\bullet$ ist eine Kettenabbildung $f^\bullet : X^\bullet \to Y^\bullet$, so dass alle Diagramme kommutieren, i.e. für jedes n ist $d_Y^n \circ f^n = f^{n+1} \circ d_X^n$:

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] & X^{n-1} \arrow[r, "d_X^{n-1}"] \arrow[d, "f^{n-1}"] & X^n \arrow[r, "d_X^n"] \arrow[d, "f^n"] & X^{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "f^{n+1}"] & \dots \\
\dots \arrow[r] & Y^{n-1} \arrow[r, "d_Y^{n-1}"] & Y^n \arrow[r, "d_Y^n"] & Y^{n+1} \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

Die Modulkategorie ist eine volle Unterkategorie von $\mathcal{C}(A)$ - man betrachtet jeden Modul als Komplex, der im Grad 0 konzentriert ist ("stalk complex in degree 0"), die Einbettung A-**mod** $\hookrightarrow \mathcal{C}(A)$ ist durch

$$X \mapsto \quad \cdots \to 0 \to \overset{\text{Grad } 0}{X} \to 0 \to \dots$$

---

[3] ist A kommutativ, so ist $\mathcal{C}(A)$ eine abelsche Kategorie

gegeben. Dann kann man den sogenannten *Verschiebungsfunktor vom Grad* k, $[k] : \mathcal{C}(A) \to \mathcal{C}(A)$ folgendermassen definieren:

$$\begin{array}{rrcl} X[k]^\bullet : & (X[k])^n & := & X^{n+k} \\ & d^n_{X[k]} & := & (-1)^k d_X^{n+k} \\ \\ f[k]^\bullet : & f[k]^n & = & f^{n+k} \end{array}$$

Am Beispiel:

$$\begin{tikzcd}
Y^\bullet & \dots \arrow[r] & Y^{n-1} \arrow[r, "d_Y^{n-1}"] & Y^n \arrow[r, "d_Y^n"] & Y^{n+1} \arrow[r] & \dots \\
X^\bullet \arrow[u, "f^\bullet"'] & \dots \arrow[r] & X^{n-1} \arrow[u, "f^{n-1}"] \arrow[r, "d_X^{n-1}"] & X^n \arrow[u, "f^n"] \arrow[r, "d_X^n"] & X^{n+1} \arrow[u, "f^{n+1}"'] \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
X[1]^\bullet & \dots \arrow[r] & X[1]^{n-1} \arrow[r, "d^{n-1}_{X[1]}"] \arrow[d, equal] & X[1]^n \arrow[r, "d^n_{X[1]}"] \arrow[d, equal] & X[1]^{n+1} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \dots \\
X[1]^\bullet \arrow[d, "f[1]^\bullet"'] & \dots \arrow[r] & X^n \arrow[r, "-d_X^n"] \arrow[d, "f[1]^{n-1}"] & X^{n+1} \arrow[r, "-d_X^{n+1}"] \arrow[d, "f[1]^n"] & X^{n+2} \arrow[r] \arrow[d, "f[1]^{n+1}"', "=f^{n+2}"] & \dots \\
Y[1]^\bullet & \dots \arrow[r] & Y^n \arrow[r, "-d_Y^n"] & Y^{n+1} \arrow[r, "-d_Y^{n+1}"] & Y^{n+2} \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

Notation. Wir schreiben $\mathrm{Ht}(X^\bullet, Y^\bullet)$ für die nullhomotopen Kettenabbildungen,

$$\mathrm{Ht}(X^\bullet, Y^\bullet) := \{f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(A)}(X^\bullet, Y^\bullet) \mid f \text{ ist nullhomotop}\}$$

(i.e. es existiert eine Familie $s^n : X^n \to Y^{n-1}$, so dass für alle n gilt: $f^n = s^{n+1} \circ d_X^n + d_Y^{n-1} \circ s^n$). Wir schreiben $K(A)$ für die *Homotopiekategorie*, i.e. die Kategorie, deren Objekte dieselbe wie die Objekte von $\mathcal{C}(A)$ sind und mit Morphismen

$$\mathrm{Hom}_{K(A)}(X^\bullet, Y^\bullet) := \frac{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(A)}(X^\bullet, Y^\bullet)}{\mathrm{Ht}(X^\bullet, Y^\bullet)}$$

Beispiel $A = kQ$ für einen Köcher Q

Sei A die Algebra der oberen Dreiecksmatrizen in $M_3(k)$ betrachtet worden, i.e. die Algebra

$$A := \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix} \mid a, b, c, d, e, f \in k \right\}$$

Diese Algebra kann auch mittels eines Köchers definiert werden, dies tun wir hier. A ist die sogenannte *Wege-Algebra* des Köchers Q, geschrieben kQ, wobei Q der Köcher

$$Q : \qquad 1 \xrightarrow{\alpha} 2 \xrightarrow{\beta} 3$$

ist. Mehr zu Köchern (zur Darstellungstheorie von Köchern) kann man z.B. in den Skripten von B. Crawley-Boevey ([CB]) oder H. Krause ([K]) finden.

Die Algebra $A = kQ$ hat als Erzeugende ε_1, ε_2, ε_3, α, β und $\beta\alpha$, i.e.

$$kQ =< \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \alpha, \beta, \beta\alpha >_k$$

Dabei sei ε_i der triviale Weg am Punkt i.
Die Relationen sind: $\varepsilon_i^2 = \varepsilon_i$ $(i = 1, 2, 3)$ und $\varepsilon_i \gamma = \gamma = \gamma \varepsilon_j$ für $i = t(\gamma)$ und $j = s(\gamma)$ und γ einer der Pfeile α, β des Köchers Q. Die ε_i sind also idempotente Elemente von kQ (sie sind auch *orthogonal*: $\varepsilon_i \varepsilon_j = 0$ für $i \neq j$). Es gilt $1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$.

Bemerkung 5.11. Ein Resultat von P. Gabriel sagt in etwa, dass man jede Algebra A als Wege-Algebra kQ eines Köchers Q[4] auffassen kann.

Als Beispiele: (a) die polynomiale Algebra $k[T]$ wird durch den Köcher mit einem Punkt und einer Schlaufe α beschrieben.
(b) Und die abgeschnittene polynomiale Algebra $k[T]/ < T^n >$ der Polynome in T vom Grad $< n$ durch denselben Köcher, wobei nun das n-malige Durchlaufen der Schlaufe α gleich Null gesetzt wird. Die Relation ist dann $I = \alpha^n$.

$$\begin{tikzcd} Q : & \bullet \arrow[loop right, "\alpha"] \end{tikzcd}$$

Unter der Korrespondenz aus Bemerkung 5.11 gehen A-Moduln über auf *Darstellungen von Q*. Eine Darstellung von Q ist gegeben durch einen Vektorraum für jeden Punkt von Q und eine lineare Abbildung für jeden Pfeil von Q. In unserem Beispiel also durch drei Vektorräume V_i und lineare Abbildungen vom ersten in den zweiten, vom zweiten in den dritten:

$$V_1 \xrightarrow{f} V_2 \xrightarrow{g} V_3$$

Wir wollen $\mathcal{C}(A)$ und dann $K(A)$ betrachten. Dazu nehmen wir Komplexe von A-Moduln. Zuerst geben wir eine vollständige Liste der unzerlegbaren Darstellungen von Q, i.e. der unzerlegbaren A-Moduln (bis auf Isomorphie). Es gibt 6 Stück davon, sie sind hier aufgelistet (links die Abkürzung, i.e. der Name, den wir der Darstellung geben):

1	$k \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} 0$
2	$0 \xrightarrow{0} k \xrightarrow{0} 0$
3	$0 \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} k$
12	$k \xrightarrow{\mathrm{id}} k \xrightarrow{0} 0$
23	$0 \xrightarrow{0} k \xrightarrow{\mathrm{id}} k$
123	$k \xrightarrow{\mathrm{id}} k \xrightarrow{\mathrm{id}} k$

---

[4] gegebenenfalls mit Relationen: $A = kQ/I$

Wir berechnen nun die Morphismen in $K(A)$ zwischen vier verschiedenen Komplexen von Moduln. Wir wählen diese so, dass der erste Komplex (von links her), der verschieden ist von 0, gerade im Grad 0 liegt. Wieder steht links der Namen, den wir dem Komplex geben:

	Grade
	0 1
$3 \hookrightarrow 23$	$\ldots \longrightarrow 0 \longrightarrow 3 \hookrightarrow 23 \longrightarrow 0 \longrightarrow \ldots$
$23 \hookrightarrow 123$	$\ldots \longrightarrow 0 \longrightarrow 23 \hookrightarrow 123 \longrightarrow 0 \longrightarrow \ldots$
$123 \to 0$	$\ldots \longrightarrow 0 \longrightarrow 123 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \ldots$
$23 \to 0$	$\ldots \longrightarrow 0 \longrightarrow 23 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \ldots$

(Die letzten beiden sind also konzentriert in Grad 0).

Dann berechnet man

$$\begin{array}{lll} (a) & \mathrm{Hom}_{K(A)}(3 \hookrightarrow 23, 23 \hookrightarrow 123) & = & 0 \\ (b) & \mathrm{Hom}_{K(A)}(23 \hookrightarrow 123, 123 \to 0) & = & 0 \\ (c) & \mathrm{Hom}_{K(A)}(23 \hookrightarrow 123, 23 \to 0) & = & k \end{array}$$

Wir schauen hier nur den zweiten Fall an, die andern beiden werden in den Übungen gemacht.

(b) Wir schauen uns im Detail die einzelnen Schritte an. Es ist $\mathrm{Hom}_{kQ}(23, 123) = k$, denn im Diagramm müssen beide Quadrate kommutieren:

$$\begin{tikzcd} 23 \arrow[d, hook] & 0 \arrow[r] \arrow[d, "0"] & k \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[d, "\lambda"] & k \arrow[d, "\lambda"] \\ 123 & k \arrow[r] & k \arrow[r, "\mathrm{id}"] & k \end{tikzcd}$$

Daher müssen die senkrechten Pfeile Multiplikation mit dem gleichen Skalar $\lambda \in k$ sein, sonst kommutiert das zweite Quadrat nicht. Für eine injektive Abbildung ist $\lambda \neq 0$.

$$\begin{tikzcd} \ldots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d, "0"'] & 23 \arrow[r, hook, "\lambda"] \arrow[d, hook, "\mu"] \arrow[dl, dotted, "0"] & 123 \arrow[r] \arrow[d, "0"] \arrow[dl, dotted, "s^1"] & 0 \arrow[r] & \ldots \\ \ldots \arrow[r] & 0 \arrow[r, "0"'] & 123 \arrow[r, "0"'] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \ldots \end{tikzcd}$$

Ist nun $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(A)}(23 \hookrightarrow 123, 123 \to 0)$, so ist $f^k = 0$ für $k \neq 0$ und f^0 auch Multiplikation mit einem Skalar, sagen wir μ, $\mu \neq 0$. Um eine Homotopie zu finden, setzen wir $s^k = 0$ für $k \neq 1$ und $s^1 = \mu/\lambda$. Damit ist f nullhomotop, denn $f^0 - 0$ ist die Multiplikation mit μ und das ist gleich $s^1 \circ \lambda = \mu$.

5.4 Der Abbildungskegel

Sei nun wieder A eine endlich dimensionale Algebra, $\mathcal{C}(A)$ die Kategorie der Komplexe von A-Moduln.

Bemerkung. Die Homotopiekategorie ist nicht abelsch (sie hat nicht Kerne und Cokerne). Man kann zeigen, dass sie eine triangulierte Kategorie ist. Dazu benötien wir den Begriff des Abbildungskegels (Mapping Cone). Der Abbildungskegel ist ein Komplex von A-Moduln, der einer Kettenabbildung zugeordnet wird.

Zur Erinnerung: ist $X = X^\bullet$ mit Differentialen d_X^n ein Komplex von A-Moduln, so ist der Komplex $X[1]$ definiert durch $X[1]^n = X^{n+1}$ und $d^n_{X[1]} = -d_X^{n+1}$.

Eine Kettenabbildung $f \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}(A)}(X, Y)$ ist eine Familie f^n von Abbildungen, so dass alle Quadrate hier kommutieren:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & X^{n-1} \arrow[r, "d_X^{n-1}"] \arrow[d, "f^{n-1}"] & X^n \arrow[r, "d_X^n"] \arrow[d, "f^n"] & X^{n+1} \arrow[r, "d_X^{n+1}"] \arrow[d, "f^{n+1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & Y^{n-1} \arrow[r, "d_Y^{n-1}"] & Y^n \arrow[r, "d_Y^n"] & Y^{n+1} \arrow[r, "d_X^{n+1}"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Definition. Sei $f \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}(A)}(X, Y)$, Der *Abbildungskegel* $M(f)$ von f ist das folgende Objekt in $\mathcal{C}(A)$:

$$\begin{cases} M(f)^n = X[1]^n \oplus Y^n = X^{n+1} \oplus Y^n \\ d^n_{M(f)} := \begin{pmatrix} d^n_{X[1]} & 0 \\ f^{n+1} & d^n_Y \end{pmatrix} \end{cases}$$

Im Diagramm sieht das so aus:

$$\begin{tikzcd}
X[1] & \cdots \arrow[r] & X^{n-1} \arrow[r, "d^{n-2}_{X[1]}"] \arrow[ddr, "f^{n-1}"] & X^n \arrow[r, "d^{n-1}_{X[1]}"] \arrow[ddr, "f^n"] & X^{n+1} \arrow[r, "d^n_{X[1]}"] \arrow[ddr, "f^{n+1}"] & \cdots & \\
\oplus & & \oplus & \oplus & \oplus & & \\
Y & \cdots \arrow[r] & Y^{n-2} \arrow[r, "d_Y^{n-2}"'] & Y^{n-1} \arrow[r, "d_Y^{n-1}"'] & Y^n \arrow[r, "d_Y^n"'] & Y^{n+1} & \cdots
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
M(f) & \cdots \arrow[r] & M(f)^{n-2} \arrow[r, "d^{n-2}_{M(f)}"] & M(f)^{n-1} \arrow[r, "d^{n-1}_{M(f)}"] & M(f)^n \arrow[r, "d^n_{M(f)}"] & M(f)^{n+1} & \cdots
\end{tikzcd}$$

Zu der Kettenabbildung $f \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}(A)}(X, Y)$ definieren wir auch zwei Morphismen $\alpha(f)$ und $\beta(f)$ von Y in den Abbildungskegel $M(f)$ bzw. von $M(f)$ nach $X[1]$.

Definition. Sei $M(f)$ der Abbildungskegel von $f \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}(A)}(X, Y)$. Dann sind $\alpha(f) : Y \to M(f)$ und $\beta(f) : M(f) \to X[1]$ durch

$$\alpha(f)^n := \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{id}_{Y^n} \end{pmatrix},$$

$$\beta(f)^n := (\mathrm{id}_{X^{n+1}}, 0)$$

definiert.

Damit erhalten wir eine Folge von Morphismen

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{\alpha(f)} M(f) \xrightarrow{\beta(f)} X[1]$$

Nun kommen wir zur triangulierten Struktur der Homotopiekategorie $K(A)$. Als Verschiebungsfunktor wählt man $\mathcal{T} = [1]$. Ein Dreieck in $K(A)$ ist also gegeben durch

$$X \overset{\alpha}{\to} Y \overset{\beta}{\to} Z \overset{\gamma}{\to} X[1]\,,$$

wobei X, Y, Z Komplexe von A-Moduln sind und α, β, γ Kettenabbildungen bis auf Homotopie.

Und dann zum Begriff der ausgezeichneten Dreiecke:

Definition. Ein Dreieck $X \to Y \to Z \to X[1]$ in $K(A)$ heisst *ausgezeichnetes Dreieck*, falls es isomorph ist zu einem Dreieck $X' \overset{f}{\to} Y' \overset{\alpha(f)}{\to} M(f) \overset{\beta(f)}{\to} X'[1]$ für einen Morphismus f in $\mathcal{C}(A)$.

Man kann zeigen, dass in der Kategorie $K(A)$ mit dem Verschiebungsfunktor [1] die modifizierten Axiome (TR1') bis (TR4') gelten.

Satz 5.12. *Die ausgezeichneten Dreiecke in $K(A)$ erfüllen folgende Axiome:*

(TR1') Jedes Dreieck, das isomorph ist zu einem ausgezeichneten Dreieck ist ausgezeichnet. Jeder Morphismus $X \to Y$ kann in ein ausgezeichnetes Dreieck

$$X \xrightarrow{f} Y \longrightarrow Z \longrightarrow X[1]$$

eingebettet werden. Das Dreieck

$$X \xrightarrow{\mathrm{id}_X} X \longrightarrow 0 \longrightarrow X[1]$$

ausgezeichnet für jedes $X \in Ob(K(A))$.

(TR2') (Rotation)

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} X[1]$$

ist ein ausgezeichnetes Dreieck genau dann, wenn

$$Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} X[1] \xrightarrow{-f[1]} Y[1]$$

ein ausgezeichnetes Dreieck ist.

(TR3') (Morphismen) Sind

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} X[1] \qquad\qquad X' \xrightarrow{f'} Y' \xrightarrow{g'} Z' \xrightarrow{h'} Y'[1]$$

ausgezeichnete Dreiecke, so kann jedes kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"] & Y \arrow[d, "v"] \\
X' \arrow[r, "f'"] & Y'
\end{tikzcd}$$

in einen[5] *Morphismus von Dreiecken eingebettet werden:*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "v"] & Z \arrow[r, "h"] \arrow[d, dotted] & X[1] \arrow[d, "u[1]"] \\
X' \arrow[r, "f'"] & Y' \arrow[r, "g'"] & Z' \arrow[r, "h'"] & Y'[1]
\end{tikzcd}$$

(TR4') (Oktaeder-Axiom) Hat man ausgezeichnete Dreiecke

$$\begin{gathered}
X \overset{f}{\to} Y \to Z' \to X[1] \\
Y \overset{g}{\to} Z \to X' \to Y[1] \\
X \overset{gf}{\to} Z \to Y' \to X[1]
\end{gathered}$$

so existiert ein ausgezeichnetes Dreieck

$$Z' \to Y' \to X' \to Z'[1],$$

so dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{id}_X"] & Y \arrow[r] \arrow[d, "g"] & Z' \arrow[r] \arrow[d] & X[1] \arrow[d, "\mathrm{id}_{X[1]}"] \\
X \arrow[r, "gf"] \arrow[d] & Z \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}_Z"] & Y' \arrow[r] \arrow[d] & X[1] \arrow[d, "f[1]"] \\
Y \arrow[r, "g"] \arrow[d] & Z \arrow[r] \arrow[d] & X' \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}_{X'}"] & Y[1] \arrow[d] \\
Z' \arrow[r, dotted] & Y' \arrow[r, dotted] & X' \arrow[r, dotted] & Z'[1]
\end{tikzcd}$$

Satz 5.13. *Die Zusammensetzung von zwei Morphismen in einem ausgezeichneten Dreieck in $K(A)$ ist Null.*

---

[5] nicht unbedingt eindeutigen

Beweis. Sei $X \overset{f}{\to} Y \overset{g}{\to} Z \overset{h}{\to} X[1]$ ein ausgezeichnetes Dreieck. Nach (TR1') (für $X \overset{\mathrm{id}_X}{\to} X$) und (TR3') (Existenz einer Abbildung zu dem Paar (id_X, f), die einen Morphismus zwischen Dreiecken ergibt), gibt es ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\mathrm{id}_X"] \arrow[d, "\mathrm{id}_X"] & X \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \arrow[r] \arrow[d, dotted] & X[1] \arrow[d, "\mathrm{id}_{X[1]}"] \\
X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, "g"] & Z \arrow[r, "h"] & X[1]
\end{tikzcd}$$

Daraus folgt, dass $gf = 0$ ist. Die Eigenschaften $hg = 0$ und $f[1]h = 0$ folgen dann mit der Rotation, i.e. mit (TR2'). □

Kapitel 6

Derivierte Kategorien

Sei $K(A)$ die Homotopiekategorie der Komplexe von A-Moduln (A eine endlich-dimensionale Algebra). Mittels Lokalisierung einer triangulierten Kategorie bzgl. einer Untermenge der Objekte kann man die derivierte Kategorie $\mathcal{D}(A)$ definieren[1].

6.1 Lokalisierung von Kategorien

Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie und S eine Familie von Morphismen in $\mathcal{C}$.

Definition. S heisst ein *multiplikatives System*, falls es die folgenden Axiome erfüllt:

(S1) Für jedes $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ ist id_X in S.

(S2) Für jede zwei Elemente f, g von S für die die Verknüpfung $g \circ f$ existiert, ist $g \circ f$ auch in S.

(S3) Jedes Diagramm wie links:

$$\begin{tikzcd}
& Z \arrow[d, "g"] \\
X \arrow[r, "f"] & Y
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
& Z \\
X & Y \arrow[l, "f"'] \arrow[u, "g"]
\end{tikzcd}$$

mit $g \in S$ kann zu einem kommutativen Diagramm (links)

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[r, dotted] \arrow[d, dotted, "h"] & Z \arrow[d, "g"] \\
X \arrow[r, "f"] & Y
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
W & Z \arrow[l, dotted] \\
X \arrow[u, dotted, "h"'] & Y \arrow[l, "f"] \arrow[u, "g"']
\end{tikzcd}$$

mit $h \in S$ ergänzt werden. Dasselbe gilt mit den umgekehrten Pfeilen (Diagramme rechts).

---

[1] man kann dies allgemeiner für $K(\mathcal{A})$ durchführen, wobei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie ist

(S4) Für f, $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ sind die folgenden Bedingungen äquivalent:
(i) $\exists\, t : Y \to Y'$, $t \in S$, so dass $t \circ f = t \circ g$
(ii) $\exists\, s : X' \to X$, $s \in S$, so dass $f \circ s = g \circ s$.

$$\begin{tikzcd}
 & & & & X' \arrow[d, "s"] & \\
X \arrow[r, "{f,g}"] & Y \arrow[d, "t"] & {} \arrow[r, leftrightarrow, "\text{äquiv.}"] & {} & X \arrow[r, "{f,g}"] & Y \\
 & Y' & & & &
\end{tikzcd}$$

Um die Lokalisierung (bzgl. S) zu definieren, brauchen wir die Äquivalenzrelation $\mathcal{R}$ auf Tripeln (X', s, f) wobei $f : X' \to Y$ ist, $s \in S$ von X' nach X: Zu X, Y, X' und $X'' \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ seien $s : X' \to X$, $t : X'' \to X$ und $f : X' \to Y$, $g : X'' \to Y$. Es ist $(X', s, f) \ \sim_{\mathcal{R}} \ (X'', t, g)$ genau dann, wenn ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & X & \\
X' \arrow[ur, "s"] \arrow[dr, "f"'] & X''' \arrow[u, "u"] \arrow[l] \arrow[r] & X'' \arrow[ul, "t"'] \arrow[dl, "g"] \\
 & Y &
\end{tikzcd}$$

existiert mit $u \in S$ (und $X''' \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$).

Definition. Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie, S ein multiplikatives System. Die *Lokalisierung von* $\mathcal{C}$ *bezüglich (durch)* S ist die Kategorie $\mathcal{C}_S$, die wie folgt definiert ist:

$$\mathrm{Ob}(\mathcal{C}_S) = \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$$
$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_S}(X, Y) = \{(X', s, f) \mid X' \in \ \mathrm{Ob}(\mathcal{C}),\ s : X' \to X,\ f : X' \to Y,\ s \in S\}/\mathcal{R}$$

für alle X, $Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$. Die Verknüpfung von Tripeln (X', s, f) in $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_S}(X, Y)$ und $(Y', t, g) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_S}(Y, Z)$ wird wie folgt definiert: Man findet mittels (S3) ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & & X'' \arrow[dl, dotted, "t'"'] \arrow[dr, dotted, "h"] & & \\
 & X' \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "f"] & & Y' \arrow[dl, "t"'] \arrow[dr, "g"] & \\
X & & Y & & Z
\end{tikzcd}$$

und setzt

$$(Y', t, g) \circ (X', s, f) = (X'', s \circ t', g \circ h)\ .$$

Man kann die Axiome (S1) bis (S4) benutzen, um zu überprüfen, dass $\mathcal{C}_S$ eine Kategorie ist.

Bemerkung. Man kann sich einen Morphismus (X', s, f) aus $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_S}(X,Y)$ mit $X' \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, $s : X' \to X$ in S und $f : X' \to Y$ als Bruch vorstellen: das Diagramm

$$\begin{tikzcd} & X' \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "f"] & \\ X \arrow[rr, "f \circ s^{-1}"'] & & Y \end{tikzcd}$$

stellt die Verknüpfung $f \circ s^{-1}$: $X \to Y$ dar.

Zur Erinnerung: ist $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, S ein multiplikatives System, so ist $\mathrm{id}_X \in S$ nach (S1). Damit erhält man eine Abbildung von $\mathcal{C}$ in die Lokalisierung von $\mathcal{C}$ bzgl. S.

Notation. Die Abbildung

$$\begin{array}{ll} Q(X) = X & X \text{ ein Objekt von } \mathcal{C} \\ Q(f) = (X, \mathrm{id}_X, f) & f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)\,, \end{array}$$

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "\mathrm{id}_X"'] \arrow[dr, "f"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

wird *Lokalisierungsfunktor* genannt. Q ist ein Funktor $Q : \mathcal{C} \to \mathcal{C}_S$.

Ist $\mathcal{C}$ eine triangulierte Kategorie mit ausgezeichneten Dreicken, so kann man bzgl. einer Familie von Objekten lokalisieren. Insbesondere geht das also im Fall der Homotopiekategorie $K(A)$. Wir betrachten von nun an speziell diesen Fall.

Definition. Sei $\mathcal{N}$ eine Familie von Objekten von $\mathcal{C} = K(A)$ (mit Verschiebungsfunktor [1]). Dann heisst $\mathcal{N}$ ein *Nullsystem*, falls es folgende Axiome erfüllt:

(N1) $0 \in \mathcal{N}$

(N2) $X \in \mathcal{N}$ genau dann, wenn $X[1] \in \mathcal{N}$

(N3) Ist $X \to Y \to Z \to X[1]$ ein ausgezeichnetes Dreieck (in $K(A)$) mit X, $Y \in \mathcal{N}$, so ist auch $Z \in \mathcal{N}$.

Man definiert dann eine Familie von Morphismen wie folgt:

$$S(\mathcal{N}) := \left\{ f : X \to Y \;\middle|\; \begin{array}{l} f \text{ kann eingebettet werden in ein ausgezeichnetes Dreieck} \\ X \xrightarrow{f} Y \to Z \to X[1] \;\text{ mit } Z \in\; \mathcal{N} \end{array} \right\}$$

Satz 6.1. *Ist $\mathcal{N}$ ein Nullsystem, so ist $S(\mathcal{N})$ ein multiplikatives System.*

Beweis. Man muss (S1) bis (S4) überprüfen. (S1) kann man mittels (N1) und (TR1') beweisen.

Zu (S2): Sind $X \overset{f}{\to} Y \to Z' \to X[1]$ und $Y \overset{g}{\to} Z \to X' \to Y[1]$ ausgezeichnete Dreiecke mit X' und $Z' \in \mathcal{N}$. Da $g \circ f$ existiert, existiert nach (TR1') ein ausgezeichnetes Dreieck $X \overset{g\circ f}{\to} Z \to Y' \to X[1]$ und nach (TR4') existiert ein ausgezeichnetes Dreieck $Z' \to Y' \to X' \to Z'[1]$. Nach (N2) ist $Z'[1]$ in $\mathcal{N}$ und nach dem Rotationsaxiom (TR2') sind $Y' \to X' \to Z'[1] \to Y'[1]$ und $X' \to Z'[1] \to Y'[1] \to X'[1]$ ausgezeichnete Dreiecke. Mit (N3) ist also $Y'[1]$ in $\mathcal{N}$, i.e. $Y' \in \mathcal{N}$ (wiederum (N2)). Damit ist $g \circ f$ in $S(\mathcal{N})$.

Zu (S3): Sei $Z \overset{g}{\to} Y \overset{k}{\to} X' \to Z[1]$ mit $X' \in \mathcal{N}$. Sei $f : X \to Y$. Dann existiert für die Verknüpfung $k \circ f$ ein ausgezeichnetes Dreieck

$$W \to X \xrightarrow{k\circ f} X' \to W[1] \,.$$

Mit (TR3') und (TR2') erhalten wir einen Morphismus von ausgezeichneten Dreiecken

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[r, "h"] & X \arrow[r] \arrow[d, "f"] & X' \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}_{X'}"] & W[1] \arrow[d] \\
Z \arrow[r] & Y \arrow[r] & X' \arrow[r] & Z[1]
\end{tikzcd}$$

da nach Voraussetzung $X' \in \mathcal{N}$ liegt, ist also $h \in S(\mathcal{N})$. Ein ähnliches Argument gilt für die umgedrehten Pfeile.

Zu (S4): Seien $f : X \to Y$ und $t : Y \to Y'$ mit $t \in S(\mathcal{N})$ und $t \circ f = 0$ (also ist g die Nullabbildung). Wir zeigen, dass ein $s : X' \to X$, $x \in S(\mathcal{N})$ existiert, so dass $f \circ s = 0$. Sei $Z \overset{k}{\to} Y \overset{t}{\to} Y' \to Z[1]$ ein ausgezeichnetes Dreieck mit $Z \in \mathcal{N}$. Nach (TR1') gibt es ein ausgezeichnetes Dreieck zu $X \overset{\mathrm{id}_X}{\to} X$ und wir erhalten ein Diagramm

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\mathrm{id}_X"] & X \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \arrow[r] \arrow[d, "0"] & X[1] \arrow[d, dotted, "\exists\ h[1]"] \\
Z \arrow[r, "k"] & Y \arrow[r, "t"] & Y' \arrow[r] & Z[1]
\end{tikzcd}$$

wo das mittlere Quadrat kommutiert (da nach Voraussetzung $tf = 0$ ist). Rotiert man (mit (TR2')) die beiden Dreiecke, um die vertikalen Morphismen $(f, 0)$ links stehen zu haben, so kann man dann (TR3') benutzen: es gibt $h[1]$, so dass wir einen Morphismus von ausgezeichneten Dreiecken haben. Rotiert man wieder zurück, so gibt das $h : X \to Z$ mit $f = k \circ h$. Betten wir h in ein ausgezeichnetes Dreieck $X' \overset{s}{\to} X \overset{h}{\to} Z \to X'[1]$ ein, so erfüllt s die gewünschte Eigenschaft. Die umgekehrte Richtung kann analog gezeigt werden. $\square$

Notation. Ist $\mathcal{N}$ ein Nullsystem in $\mathcal{C} = K(A)$, so schreibt man $K(A)/\mathcal{N}$ anstatt $K(A)_{S(\mathcal{N})}$ für die Lokalisierung von $K(A)$ durch $\mathcal{N}$.

Satz 6.2. *Die Lokalisierung $K(A)/\mathcal{N}$ ist eine triangulierte Kategorie, wobei man als ausgezeichnete Dreiecke die nimmt, die isomorph sind zu Bildern von ausgezeichneten Dreiecken in $K(A)$.*

Beweis. Das ist I.1.6.9 in [KS]. □

6.2 Derivierte Kategorien

Wir betrachten als Beispiel einer Lokalisierung die derivierte Kategorie $\mathcal{D}(A)$ assoziiert zu $K(A)$, wobei A eine endlich-dimensionale Algebra ist.

Zur Erinnerung: ist $X \in \mathcal{C}(A)$ ein Komplex von A-Moduln,

$$X: \quad \dots X^{k-1} \xrightarrow{d_X^{k-1}} X^k \xrightarrow{d_X^k} X^{k+1} \to \dots$$

so ist die k-te Cohomologie von X definiert als

$$H^k(X) := \ker d_X^k / \operatorname{im} d_X^{k-1} \quad \in A\text{-}\mathbf{mod}\,,$$

i.e. die Differenz von der Exaktheit. Eine Kettenabbildung $f : X \to Y$ induziert Morphismen

$$H^k(f) : H^k(X) \to H^k(Y)\,.$$

Dann definiert man folgenden Begriff:

Definition. Sei $f \in \operatorname{Hom}_{K(A)}(X, Y)$ ein Morphismus. f heisst *Quasi-Isomorphismus*, (kurz qis), falls $H^n(f)$ ein Isomorphismus ist für alle n.

Wir werden die Kategorie $K(A)$ bzgl. der Familie der qis lokalisieren. Die qis werden dadurch zu Isomorphismen in $\mathcal{D}(A)$.

Beispiel. Sei M ein A-Modul und P eine projektive Auflösung von M. P ist also ein (beschränkter) Komplex von A-Moduln. Wir betrachten M als Komplex, der in Grad 0 konzentriert ist. Für einen surjektiven Homomorphismus $f : P_0 \to M$ erhalten wir eine Kettenabbildung f mit $f^0 := f : P^0 \to M$, $f^k := 0$ für $k \neq 0$.

$$\begin{tikzcd}
P: & \dots \arrow[r] & P^2 \arrow[r] \arrow[d, "0"] & P^1 \arrow[r, "d_P^1"] \arrow[d, "0"] & P^0 \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
M: & \dots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r, "0"] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Es ist $P^0/\ker f \cong M$. Also $H^0(P) \cong M$ und $H^0(M) = M$. Ausserdem $H^k(P) = 0$ für $k > 0$. Also ist der Komplex M (konzentriert in 0) quasi-isomorph zu jeder projektiven Auflösung P von M.

Beispiel. Sei $X \in \mathcal{C}(A)$ ein Komplex von A-Moduln:

$$\begin{tikzcd} X: & \dots \arrow[r] & X^{n-2} \arrow[r] & X^{n-1} \arrow[r, "d_X^{n-1}"] & X^n \arrow[r, "d_X^n"] & X^{n+1} \arrow[r, "d_X^{n+1}"] & X^{n+2} \arrow[r] & \dots \end{tikzcd}$$

Dann sind die zugehörigen *abgeschnittenen Komplexe* wie folgt definiert:

$$\begin{tikzcd} \tau^{\leq n}(X): & \dots \arrow[r] & X^{n-2} \arrow[r] & X^{n-1} \arrow[r] & \ker d_X^n \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \dots \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \tau^{\geq n}(X): & \dots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \operatorname{cok} d_X^{n-1} \arrow[r] & X^{n+1} \arrow[r] & X^{n+2} \arrow[r] & \dots \end{tikzcd}$$

Das liefert (mit $m \leq n$) Morphismen in $\mathcal{C}(A)$:

$$\begin{array}{ll} \tau^{\leq n}(X) \to X\,, & X \to \tau^{\geq n}(X) \\ \tau^{\leq m}(X) \to \tau^{\leq n}(X)\,, & \tau^{\geq n}(X) \to \tau^{\geq m}(X) \end{array}$$

Nun ist einerseits $H^k(\tau^{\leq n}(X)) \to H^k(X)$ ein Isomorphismus für $k \leq n$ und $H^k(\tau^{\leq n}(X)) = 0$ für $k > n$. Andrerseits ist $H^k(X) \to H^k(\tau^{\geq n}(X))$ ein Isomorphismus für $k \geq n$ und $H^k(\tau^{\geq n}(X)) = 0$ für $k < n$. (Cf. Proposition I.1.3.7 in [KS]).

Dann ist für ein Objekt X in $K(A)$ mit $H^j(X) = 0$ für $j > n$ (bzw. für $j < n$) der Abschneidemorphismus $\tau^{\leq n}(X) \to X$ ein qis (bzw. $X \to \tau^{\geq n}(X)$ ein qis).

Als Nullsystem wählen wir nun alle Komplexe, die exakt sind: Die Teilmenge

$$\mathcal{N} := \{X \in \mathrm{Ob}(K(A)) \mid H^n(X) = 0 \ \forall\ n\}$$

ist ein Nullsystem in $K(A)$. Man überprüfe, dass diese Teilmenge die Axiome des Nullsystems erfüllt. Zur Erinnerung: das zu $\mathcal{N}$ assoziierte multiplikative System ist

$$S(\mathcal{N}) = \{f \in \mathrm{Hom}_{K(A)}(X,Y) \mid \exists\ X \xrightarrow{f} Y \to Z \to X[1] \text{ ausgezeichnet, } H^n(Z) = 0 \ \forall\ n\}$$

Für folgende Bemerkung benötigen wir den Begriff des cohomologischen Funktors:

Definition. Ist $F : \mathcal{C} \to \mathcal{A}$ ein Funktor von einer triangulierten Kategorie $\mathcal{C}$ (mit Verschiebungsfunktor $\mathcal{T}$) in eine abelsche Kategorie $\mathcal{A}$, so heisst F *cohomologischer Funktor*, falls $F(X) \to F(Y) \to F(Z)$ exakt ist (in $\mathcal{A}$) für jedes (ausgezeichnete) Dreieck $X \to Y \to Z \to \mathcal{T}(X)$ (in $\mathcal{C}$).

Bemerkung. Ist $\mathcal{N}$ das Nullsystem der exakten Komplexe in $\mathrm{Ob}(K(A))$, so sind die Elemente von $S(\mathcal{N})$ gerade die Quasi-Isomorphismen von $K(A)$:

Nach Proposition I.1.5.6 in [KS] ist der Funktor $H^0(\cdot) : K(A) \to$ A-**mod** ein cohomologischer Funktor, also ist $H^0(X) \to H^0(Y) \to H^0(Z)$ exakt für jedes ausgezeichnete Dreieck $X \to Y \to Z \to X[1]$.

Sei nun $f : X \to Y$ ein Element aus $S(\mathcal{N})$ und $X \xrightarrow{f} Y \to Z \to X[1]$ ein zu f assoziiertes ausgezeichnetes Dreieck (nach (TR1')), wobei $Z \in \mathcal{N}$ sei. Da H^0 ein cohomologischer Funktor ist und nach Voraussetzung $H^n(Z) = 0$ ist für alle n, folgt, dass f ein Isomorphismus in der Cohomologie ist.

Damit können wir die derivierte Kategorie definieren:

Definition. Die *derivierte Kategorie* von $K(A)$ ist die Kategorie $\mathcal{D}(A) := K(A)/\mathcal{N}$.

Die Morphismen in $\mathcal{D}(A)$ stellt man sich als Quotienten f/s vor,

$$\begin{tikzcd} & M' \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "f"] & \\ M & & N \end{tikzcd}$$

wobei s ein qis ist.

Analog definiert man $\mathcal{D}^b(A)$, $\mathcal{D}^+(A)$ und $\mathcal{D}^-(A)$, indem man $K(A)$ durch $K^b(A)$, $K^+(A)$ bzw. durch $K^-(A)$ ersetzt. Diese Kategorien heissen die *beschränkte*, bzw. die *links beschränkte*, die *rechts beschränkte derivierte Kategorie von* $K(A)$.

Nach Satz 6.2 sind die Kategorien $\mathcal{D}(A)$, $\mathcal{D}^b(A)$, etc. trianguliert.

6.3 Eigenschaften von $\mathcal{D}^b(A)$

Hier betrachten wir die Kategorien der beschränkten Komplexe, i.e. A sei eine endl. dim. Algebra, $\mathcal{C}^b(A)$ die Kategorie der beschr. Komplexe von A-Moduln, $K^b(A)$ die zugehörige Homotopiekategorie, $\mathcal{D}^b(A)$ die beschränkte derivierte Kategorie.

Satz 6.3. *(i) Die beschränkte derivierte Kategorie $\mathcal{D}^b(A)$ ist äquivalent zur vollen Unterkategorie von $\mathcal{D}(A)$, die aus den Objekten X besteht, für die $H^n(X) = 0$ ist für $|n| >> 0$. (Man formuliert analoge Aussagen für die links, rechts beschränkten Versionen).*

*(ii) Mittels der Zusammensetzung A-**mod** $\to K(A) \to \mathcal{D}(A)$ wird A-**mod** zur vollen Unterkategorie von $\mathcal{D}(A)$ der Objekte X mit $H^n(X) = 0$ für $n \neq 0$.*

Beweis. Proposition I.1.7.2 in [KS]. ☐

Satz 6.4. *Sei $0 \to X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \to 0$ eine kurze exakte Folge in $\mathcal{C}(A)$. Sei $M(f)$ der Abbildungskegel von f und seien $\varphi^n : M(f)^n = X^{n+1} \oplus Y^n \to Z^n$ die Morphismen $(0, g^n)$. Dann ist $\varphi = (\varphi^n)_n : M(f) \to Z$ ein Morphismus von Komplexen, $\varphi \circ \alpha(f) = g$ und φ ist ein qis.*

Beweis. (Das ist Proposition I.1.7.5 in [KS]) Es ist klar, dass φ ein Morphismus von Komplexen ist. Ausserdem haben wir eine exakte Folge

$$0 \to M(\mathrm{id}_X) \xrightarrow{\gamma} M(f) \to Z \to 0\,, \tag{6.1}$$

wobei γ zum Morphismus $\mathrm{id}_X \to f$ assoziiert ist. Dieser Morphismus wird durch das Diagramm

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\mathrm{id}_X"] \arrow[d, "\mathrm{id}_X"] & X \arrow[d, "f"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

illustriert. Zu jeder kurzen exakten Folge in $\mathcal{C}(A)$ existiert eine lange exakte Folge der Cohomologie. Insbesondere zu der obigen Folge 6.1, also erhält man

$$\cdots \to H^n(M(\mathrm{id}_X)) \to H^n(M(f)) \to H^n(Z) \overset{\omega}{\to} H^{n+1}(M(\mathrm{id}_X)) \to \ldots$$

in der Kategorie A-**mod**. muss man nun nur noch überprüfen, dass $H^n(M(\mathrm{id}_X)) = 0$ ist für alle $n \in \mathbb{Z}$. Dies ist der Fall, da der Abbildungskegel $M(\mathrm{id}_X)$ gerade Null ist in der Homotopiekategorie $K(A)$ □

Man nennt in der Situation von Satz 6.4 das ausgezeichnet Dreieck $X \to Y \to Z \overset{h}{\to} X[1]$ auch das zur kurzen exakten Folge $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ *assoziierte ausgezeichnete Dreieck*. Der "verbindende" Morphismus ist gegeben als $h = \beta(f) \circ \varphi^{-1}$.

Weitere Eigenschaften:

- Die Kategorie $\mathcal{D}^b(A)$ ist Krull-Schmidt (i.e. jedes Objekt kann eindeutig als direkte Summe von unzerlegbaren geschrieben werden).

- Sind X, Y, Z drei A-Moduln mit $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ exakt und $X \to Y \to Z \overset{h}{\to} X[1]$ in $\mathcal{D}^b(A)$ das entsprechende Dreieck, so erhalten wir mit dem verbindenen Homomorphismus ein Element $h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}(Z, X[1])$. Daraus erhält man einen Isomorphismus
$$\mathrm{Ext}^1_A(Z, X) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}(Z, X[1])\,.$$
(Rechts: Abbildungen zwischen der projektiven Auflösung von Z und derjenigen von $X[1]$). Allgemein kann man die Ext-Gruppen folgendermassen definieren:
$$\mathrm{Ext}^i_A(Z, X) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}(Z, X[i])\,.$$
Man kann $\mathrm{Ext}^i_A(Z, X)$ identifizieren mit $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}(Z[k], X[i+k])$ für jedes k. Die $\mathrm{Ext}^i_A(Z, X)$ sind abelsche Gruppen. Und man zeigt, dass für diese Definition gilt (cf. III.5 in [GM]):
$$(i)\, \mathrm{Ext}^i_A(Z, X) = 0 \text{ für alle } i < 0$$
$$(ii)\, \mathrm{Ext}^0_A(Z, X) = \mathrm{Hom}_A(Z, X)$$

Diese Definition der Ext-Gruppen stimmt mit derjenigen, die wir in Abschnitt 2.6 eingeführt haben überein. Der Vorteil der Definition aus Abschnitt 2.6 liegt darin, dass man sieht, wie die Gruppen berechnet werden.

Bemerkung. Zusammenfassend: Man beginnt mit der abelschen Kategorie[2] A-**mod** und betrachtet die Kategorie $\mathcal{C}(A)$ der Komplexe von A-Moduln[3]. Indem man Morphismen in $\mathcal{C}(A)$, die nullhomotop sind, als Null deklariert, geht man zur Homotopiekategorie $K(A)$ über[4]. Diese hat den Vorteil, dass viele Diagramme, die in $\mathcal{C}(A)$ nicht kommutieren, in

---

[2] man könnte eine beliebige abelsche Kategorie $\mathcal{A}$ nehmen

[3] bzw. $\mathcal{C}(\mathcal{A})$

[4] bzw. zu $K(\mathcal{A})$

$K(A)$ kommutieren. Diese Eigenschaft macht $K(A)$ zu einer triangulierten Kategorie. Nun möchte man, dass Morphismen in $K(A)$, die Isomorphismen in der Cohomologie induzieren, invertierbar sind. Dazu haben wir $K(A)$ bzgl. der Quasi-Isomorphismen lokalisiert und die derivierte Kategorie $\mathcal{D}(A)$ erhalten[5].

Der Fall $A = kQ$

Hier betrachten wir $A = kQ$ die Wegealgebra eines Köchers Q wie schon in Kapitel 5.3. Zur Erinnerung: die projektive Dimension eines A-Moduls M ist das minimale k, so dass in einer projektive Auflösung P von M gilt: $P_n = 0$ für alle $n > k$ und $P_k \neq 0$:

$$\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & P_k \arrow[r] & P_{k-1} \arrow[r] & \ldots \arrow[r] & P_1 \arrow[r] & P_0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & & & & & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Und die *globale Dimension von A*, gldim A, ist das Supremum der projektiven Dimensionen der A-Moduln.

Man kann zeigen, dass $\operatorname{gldim} A = 1$ ist im Fall $A = kQ$ (wir haben schon erwähnt, dass A erblich ist in einer Bemerkung zum Beispiel (b) in Kapitel 2.8).

Notation. Wir bezeichnen mit $\mathcal{P}$ die volle Unterkategorie von A-**mod** der projektiven Moduln und $\mathcal{I}$ die volle Unterkategorie der injektiven Moduln.

Satz 6.5 (Happel). *Die Verknüpfung*

$$K^b(\mathcal{P}) \hookrightarrow K^b(A) \to \mathcal{D}^b(A)$$

(bzw. $K^b(\mathcal{I}) \hookrightarrow K^b(A) \to \mathcal{D}^b(A)$) gibt eine Äquivalenz von triangulierten Kategorien.

(Der Satz gilt allgemeiner für A mit $\operatorname{gldim} A < \infty$. Als Referenz: [H], Abschnitt 3.3, Seite 29).

Als Konsequenz davon können wir in der Homotopiekategorie $K^b(\mathcal{P})$ arbeiten anstatt in $\mathcal{D}^b(A)$ und jeden Modul durch seine projektive Auflösung ersetzen.

---

[5] bzw. $\mathcal{D}(\mathcal{C})$

Literaturverzeichnis

[B] D. Benson, *Representations and Cohomology I: basic representation theory of finite groups and associative algebras*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 30, Cambridge, 1998.

[C] J.F. Carlson, *Modules and Group Algebras*, Notes by R. Suter. Lecture Notes in Mathematics, ETH Zürich, Birkhäuser Verlag, 1997.

[CB] B. Crawley-Boevey, *Lectures on Representations of Quivers*, http://www.maths.leeds.ac.uk/∼pmtwc/quivlecs.pdf

[CR] C. Curtis, I. Reiner, *Methods of representation theory - with applications to finite groups and orders.* Vol. I. John Wiley & Sons, 1981.

[GM] S.I. Gelfand, Yu.I. Manin, *Methods of homological algebra*, Springer Monographs in Mathematics, 2nd edition, Springer, 2003.

[H] D. Happel, *Triangulated categories in the representation theory of finite-dimensional algebras.* Cambridge University Press 1988.

[KS] M. Kashiwara, P. Schapira, *Sheaves on manifolds*, Springer, 1990.

[K] H. Krause, *Representations of quivers via reflection functors*, arXiv:0804.1428v1.

[Ma] R. Marsh, *Cluster tilting theory*, Lecture Notes, Luminy, May 2005. (Handgeschrieben - Kopien können bei mir gemacht werden).

[McL] S. Mac Lane, *Homology*, Springerl-Verlag, Berlin/New York, 1974.

[R] C.M. Ringel, *Merkblatt über Kategorien*, 4seitige Einführung in die Kategorientheorie, erhältlich auf http://www.uni-graz.at/ baurk/lehre/SS2014-HomAlg/Ringel-Kat.pdf

[HS] P.J. Hilton, U. Stammbach, *A course in homological algebra*, Second edition. Graduate Texts in Mathematics, 4. Springer-Verlag, New York, 1997.

[W] C.A. Weibel, *An introduction to homological algebra.* Cambridge University Press 1994.