# Die Axiome der euklidischen Ebene

Die folgende Beschreibung der Axiome der euklidischen Ebene übernehmen wir im Wesentlichen von David Hilbert [2] (siehe auch [1, 3]). In der Formulierung benutzen wir folgende fünf Grundbausteine:

- Eine Menge $\mathcal{E}$, welche die Punkte der Ebene repräsentiert,
- Eine Menge $\mathcal{G} \subset \mathcal{P}(\mathcal{E})$ von Teilmengen von $\mathcal{E}$, wobei jedes $g \in \mathcal{G}$ die Punkte einer Geraden beschreibt,
- Eine Teilmenge $\mathcal{Z} \subset \mathcal{E} \times \mathcal{E} \times \mathcal{E}$, wobei $(A, B, C) \in \mathcal{Z}$ die Beziehung "$B$ liegt zwischen $A$ und $C$" beschreibt,
- Eine Relation $\cong$ auf $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$, wobei $(A, B) \cong (C, D)$ die Eigenschaft "die Strecke $AB$ ist kongruent zur Strecke $CD$" beschreibt, und
- Eine Relation $\simeq$ auf $\mathcal{E} \times \mathcal{E} \times \mathcal{E} \setminus \bigcup_{g \in \mathcal{G}} g \times g \times g$, wobei $(A, B, C) \simeq (D, E, F)$ die Eigenschaft "der Winkel $\angle ABC$ ist kongruent zum Winkel $\angle DEF$" beschreibt.

## Die Inzidenzaxiome

(I1) Durch je zwei verschiedene Punkte geht genau eine Gerade.

(I2) Jede Gerade enthält mindestens zwei voneinander verschiedene Punkte.

(I3) Es gibt drei Punkte, die nicht alle auf einer Geraden liegen.

## Das Parallelenaxiom

(P) Ist $g$ eine Gerade und $A$ ein Punkt, der nicht auf $g$ liegt, so gibt es höchstens eine Gerade $h$ durch $A$, welche $g$ nicht schneidet.

## Die Axiome der Lage

(L1) Liegt $B$ zwischen $A$ und $C$, so sind $A$, $B$ und $C$ drei verschiedene Punkte einer Geraden, und $B$ liegt auch zwischen $C$ und $A$.

(L2) Sind $A$ und $B$ zwei verschiedene Punkte, so gibt es einen Punkt $C$, so dass $B$ zwischen $A$ und $C$ liegt.

(L3) Sind $A$, $B$ und $C$ drei verschiedene Punkte einer Geraden, so liegt genau einer von ihnen zwischen den beiden anderen.

(L4) Seien $A$, $B$ und $C$ drei Punkte, die nicht alle auf einer Geraden liegen, und sei $g$ eine Gerade, die keinen der drei Punkte enthält. Gibt es dann auf $g$ einen Punkt zwischen $A$ und $B$, so gibt es auf $g$ auch entweder einen Punkt zwischen $A$ und $C$ oder einen Punkt zwischen $B$ und $C$, aber nicht beides.

Das Axiom (L4) heisst manchmal *Paschs Axiom*.

## Die Kongruenzaxiome

Bevor wir die Kongruenzaxiome beschreiben, führen wir zur Vereinfachung der Beschreibung noch weitere Begriffe ein.

Sind $A$ und $B$ zwei verschiedene Punkte, so besteht *die Strecke* $AB$ aus den Punkten $A$ und $B$ sowie allen Punkten zwischen $A$ und $B$. *Der Strahl* $\overrightarrow{AB}$ besteht aus allen Punkten der Strecke $AB$, sowie allen Punkten $C$, so dass $B$ zwischen $A$ und $C$ liegt. Ist $g$ eine Gerade und $A \neq B$ zwei Punkte, die nicht auf $g$ liegen, so sagen wir, dass $A$ und $B$ *auf derselben Seite von* $g$ *liegen*, falls die Strecke $AB$ keinen Punkt von $g$ enthält.

(K1) Sind $A$, $B$, $A'$ und $C$ Punkte mit $A' \neq C$, so gibt es auf dem Strahl $\overrightarrow{A'C}$ einen eindeutigen Punkt $B'$ mit $AB \cong A'B'$.

(K2) Ist $AB \cong A'B'$ und $AB \cong A''B''$, so gilt auch $A'B' \cong A''B''$. Auch ist jede Strecke zu sich selbst kongruent.

(K3) Liegt $B$ zwischen $A$ und $C$ und liegt $B'$ zwischen $A'$ und $C'$, und gilt $AB \cong A'B'$ und $BC \cong B'C'$, so gilt auch $AC \cong A'C'$.

(K4) Liegen $A$, $B$ und $C$ nicht auf einer Geraden, so gilt $\angle BAC \simeq \angle CAB$. Ist $D$ ein von $A$ verschiedener Punkt auf dem Strahl $\overrightarrow{AB}$ und $E$ ein von $A$ verschiedener Punkt auf dem Strahl $\overrightarrow{AC}$, so gilt $\angle BAC \simeq \angle DAE$.

(K5) Liegen $A$, $B$ und $C$ nicht auf einer Geraden und liegen $A'$, $B'$ und $D$ ebenfalls nicht auf einer Geraden, so gibt es einen eindeutigen Strahl $\overrightarrow{A'C'}$ mit $\angle BAC \simeq \angle B'A'C'$, so dass $D$ und $C'$ auf derselben Seite der Geraden durch $A'$ und $B'$ liegen.

(K6) Liegen $A$, $B$ und $C$ nicht auf einer Geraden und ebenso $A'$, $B'$ und $C'$ nicht auf einer Geraden, und gilt $AB \cong A'B'$, $BC \cong B'C'$ und $\angle ABC \simeq \angle A'B'C'$, so gilt auch $AC \cong A'C'$ sowie $\angle BAC \simeq \angle B'A'C'$ und $\angle BCA \simeq \angle B'C'A'$.

Das Axiom (K6) formuliert also den aus der Schule bekannten Satz, dass zwei Dreiecke kongruent sind, wenn zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel übereinstimmen.

## Die Stetigkeitsaxiome

(S1) Sind $A \neq B$ und $A' \neq B'$ Punkte, so gibt es eine natürliche Zahl $n \geq 1$ und Punkte $C_1, \ldots, C_n$ auf dem Strahl $\overrightarrow{A'B'}$ mit folgenden Eigenschaften:

  (a) für $j = 1, \ldots, n-1$ liegt $C_j$ zwischen $A'$ und $B'$ oder ist gleich $B'$,

  (b) $B'$ liegt zwischen $A'$ und $C_n$, und

  (c) die Strecken $A'C_1$ sowie $C_jC_{j+1}$ (für $j = 1, \ldots n-1$) sind kongruent zu $AB$.

(S2) Ist eine Gerade $g$ die disjunkte Vereinigung zweier Teilmengen $\mathcal{S}$ und $\mathcal{T}$ und liegt kein Punkt von $\mathcal{S}$ zwischen zwei Punkten von $\mathcal{T}$ und kein Punkt von $\mathcal{T}$ zwischen zwei Punkten von $\mathcal{S}$, so gibt es einen eindeutigen Punkt $A$ auf $g$, so dass für jedes Paar von Punkten $B \in \mathcal{S}$ und $C \in \mathcal{T}$ mit $B \neq A$ und $C \neq A$ der Punkt $A$ zwischen $B$ und $C$ liegt.

Das Axiom (S1) heisst das *Archimedische Axiom* und das Axiom (S2) heisst das *Dedekindsche Axiom*.

## References


[1] D. Hartshorne, *Geometry: Euclid and beyond*, Springer, 2000

[2] D. Hilbert, *Grundlagen der Geometrie*, 14. Auflage, Teubner, 1999

[3] H. Knörrer, *Geometrie*, 2. Auflage, Vieweg, 2006