Entwicklung der Axiomatik in der ebenen Geometrie

Veranstaltung: Geschichte der Mathematik

Dozent: Prof. Dr. Joachim Hilgert

Referent: Andreas Schneider

Inhalt:

1. Einleitung
2. Euklid
3. Historische Entwicklung
4. Hilbert
5. Kolmogorov
6. Fazit
7. Quellen und Literatur

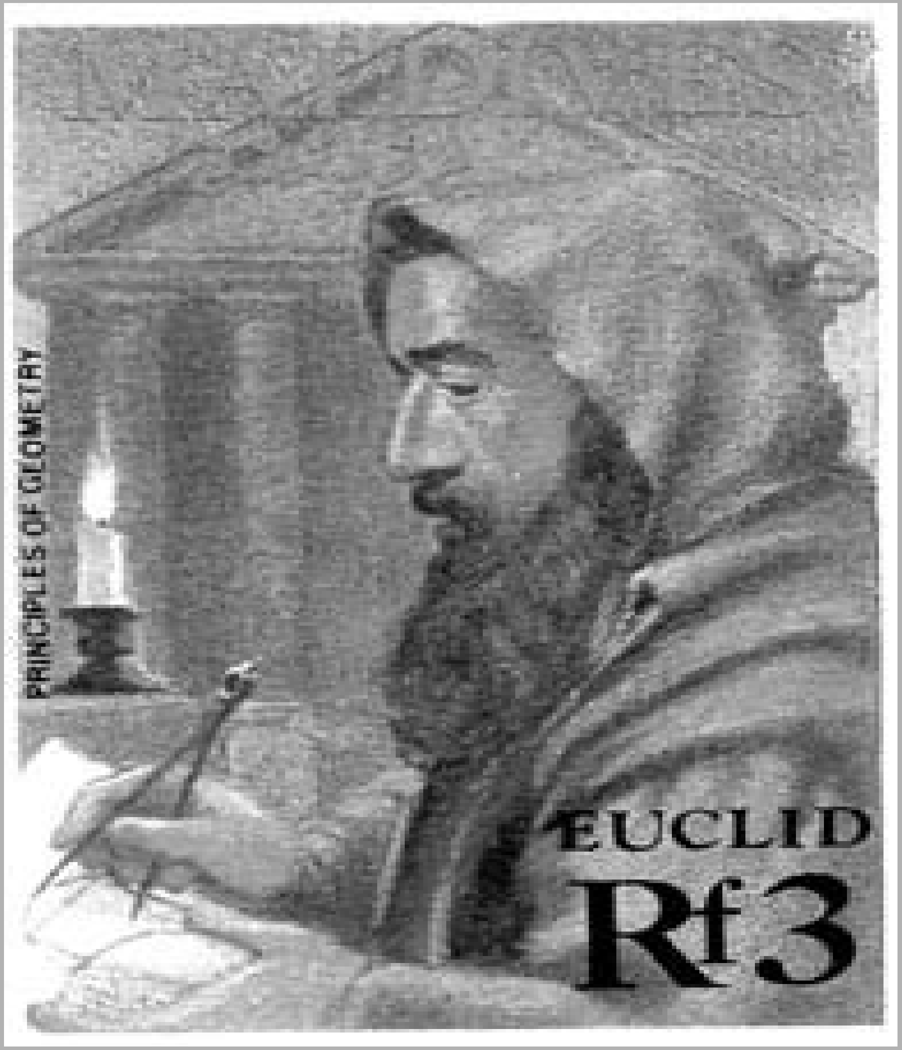
1. Einleitung

Axiom: Grundsatz der unmittelbar einleuchtet und nicht weiter zu begründen ist.

Ziel der Axiomatik ist die Herleitung der Lehrsätze der Geometrie durch logisches Schließen aus den Axiomen.

Entwicklung der Axiomatik in der ebenen Geometrie

2. Euklid



Kurzbiographie:

- ~ 340-270 v. Chr.
- griechischer Mathematiker
- über sein Leben ist fast nichts bekannt
- um 300 v. Chr. sammelte Euklid das grundlegende mathematische Wissen seiner Zeit und stellte es in dem Buch „Die Elemente“ (griechisch: stoicheia) systematisch dar
- die 13 Bände waren das wichtigste mathematische Lehrbuch für über 2000 Jahre (!)
- Arbeitsgebiet: Geometrie, Zahlen

2.1 Methodenwechsel bei Euklid

- Entscheidend und neu bei Euklid (oder besser in den Elementen) war die **deduktive Methode**, d.h. Aussagen mithilfe von logischen Regeln aus den Axiomen herzuleiten.

- In der Zeit vor Euklid wurde in der Mathematik **induktiv** gearbeitet, d.h. aus Experimenten und Erfahrungen wurden Gesetzmäßigkeiten abgeleitet.

(aus messen und addieren der Winkel im Dreieck folgt der Winkelsummensatz im Dreieck)

Entwicklung der Axiomatik in der ebenen Geometrie

- Grenzen der experimentellen Beweise lagen

  a) in der **Genauigkeit**
  (Durch messen kann nicht festgestellt werden, ob die Winkelsumme im Dreieck wirklich 180° beträgt.)

  b) im **Mangel an Allgemeinheit**
  (Falls es eine absolute Genauigkeit gäbe, würden die erzielten Ergebnisse nur für einzelne spezielle Fälle gelten. So würde der Winkelsummensatz nur für tatsächlich vermessene Dreiecke gelten.)

➔ Einführung der deduktiven Methode war somit die Geburtsstunde der exakten Mathematik!

Anforderungen an die deduktive Methode bzw. an die Axiome:

a) kein Axiom zu viel

(Axiome sollen **voneinander unabhängig** sein, d.h. es darf sich also kein Axiom durch logische Schlüsse aus den Anderen herleiten lassen.)

b) kein Axiom zu wenig

(Das **Axiomensystem** muss **vollständig** sein. Alle geometrischen Aussagen müssen aus den Axiomen herleitbar sein.)

2.2 Axiome des Euklids

Euklid legte in seinem Werk „Die Elemente“ Definitionen, Axiome und Postulate fest:

Definitionen (23): Grundbegriffserklärungen (z.B. Punkt, Linie, Fläche, Winkel, Kreis, etc.)

Axiome (9): allgemeine logische Grundsätze (z.B. „Was dem selben gleich ist, ist auch einander gleich“)

Postulate (5): spezielle geometrische Grundsätze

Entwicklung der Axiomatik in der ebenen Geometrie

Axiomatik der ebenen Geometrie beruhte vor allem auf den Postulaten:

Gefordert soll sein:

(1) Dass man von jedem Punkt nach jedem Punkt die Strecke ziehen kann.

(2) Dass man eine begrenzte gerade Linie zusammenhängend gerade verlängern kann.

(3) Dass man mit jedem Mittelpunkt und Abstand den Kreis zeichnen kann.

(4) Dass alle rechten Winkel einander gleich sind.

(5) Und dass, wenn eine gerade Linie beim Schnitt mit zwei geraden Linien bewirkt, dass innen auf derselben Seite entstehende Winkel zusammen kleiner als zwei Rechte werden, dann treffen sich die zwei geraden Linien bei Verlängerung ins Unendliche auf der Seite, auf der die Winkel liegen, die zusammen kleiner als zwei Rechte sind.

(Parallelenaxiom)

Aus: EUKLID, „Die Elemente“

Ein Beispiel für die Anwendung der euklidischen Axiomatik

3. Historische Entwicklung

a) im Verlauf der Antike:

- hohe Wertschätzung gegenüber den Elementen
- ABER: erste **Kritik am 5. Postulat**
- Grund: formulierter Sachverhalt hatte nicht dasselbe
  Maß an Selbstverständlichkeit, wie die anderen Axiome

Entwicklung der Axiomatik in der ebenen Geometrie

- Verdacht: Euklid hat das Parallelenaxiom nur postuliert, weil er keinen Beweis finden konnte!
- Vertreter: Geminos und Posidonius (1.Jh. v.Chr.), Klaudios Ptolemaios (2. Jh.n.Chr.), Proklus (5. Jh.), Simplikios (6.Jh.)
- Verdacht konnte nicht nachgewiesen werden (**nur Scheinbeweise**)

b) im Verlauf des Mittelalters

- spätestens mit dem **Untergang des west-römischen Reiches** bestand kein nennenswerter praktischer Bedarf an mathematischen Kenntnissen

  → kritiklose Weitergabe von meist unverstandenem mathematischen Wissen

  → **Mathematik hält nur, wenn man mit ihr arbeitet**

- einzige Ausnahme: **Klöster**

Entwicklung der Axiomatik in der ebenen Geometrie

- ABER: Statt sich mit dem Inhalt kritisch zu beschäftigen, war das primäre Ziel eine **vollständige Übersetzung** der Elemente!

- Pflege griechischer Traditionen von arabischen Gelehrten

  → Ibn al Haitham versuchte eine Negation des 5. Postulats

  → Omar Khayyam ersetzte das Parallelenaxiom durch andere Annahmen

  → auch Nasir al-din`s Versuche scheiterten

  → Besserung der Quellenlage im Abendland erst durch **Kontakt zur islamischen Welt**

Entwicklung der Axiomatik in der ebenen Geometrie

c) in der Neuzeit

- **Fortschritt** durch:

  (1) das Aufblühen von Handwerk, Gewerbe, Handel und Verkehr
  → Bedarf an praktisch verwertbaren mathematischen Kenntnissen

  (2) den Aufstieg des Bürgertums gegen den Herrschaftsanspruch der Kirche
  → Wiedergeburt der antiken Wissenschaft **(Renaissance)**

  ➔ zahlreiche Druckausgaben der Elemente

Entwicklung der Axiomatik in der ebenen Geometrie

- Wideraufkommen der **Kritik am Parallelenpostulat** im 16./17. Jh. (Clavius, Wallis, Saccheri)

  → viele Versuche der Widerlegung

- Versuch die Geometrie losgelöst von Euklid in eigener Weise zu beschreiben (Clairaut, Lambert, Legendre (18. Jh.))

- Erst **Gauß, Bolyai und Lobatschewski** (19. Jh.) konnten unabhängig voneinander beweisen, dass das 5. Postulat nicht von den Anderen abhing, da es Modelle gibt, die die ersten vier Axiome erfüllen, nicht aber das Parallelenaxiom.

Entwicklung der Axiomatik in der ebenen Geometrie

- Entstehung der **nichteuklidischen Geometrie** (Axiomensystem ohne ein zum Parallelenaxiom äquivalentes Postulat ↔ absolute Geometrie)

- Formen (u.a.):

  - hyperbolische Geometrie (absolute Geometrie und die Verneinung des euklidischen Parallelenaxioms)

  - elliptische Geometrie (in ihr existieren gar keine Parallelen)

  - sphärische Geometrie (in ihr gelten nicht alle Axiome der absoluten Geometrie)

Entwicklung der Axiomatik in der ebenen Geometrie

- Situation:

  Euklidische Geometrie hatte nun den Status einer von vielen Raumformen, die sich durch ihre **Einfachheit** auszeichnete.

  → galt als trivialer Fall der zwei- und dreidimensionalen Geometrie

  → man gab sich deshalb den Räumen von beliebiger Dimension und/oder mit völlig anderen Eigenschaften hin

- ABER auch weiter Beschäftigung mit der euklidischen Geometrie

  → Viele Mathematiker waren durch die neuen Modelle im Aufbau und in der Analyse von Axiomensystemen geschult und fanden immer wieder Lücken bei Euklid.

Entwicklung der Axiomatik in der ebenen Geometrie

- Leibniz und Newton (18. Jh.) kritisierten die Definitionen im Axiomensystem

  → sie genügen nicht den Ansprüchen der logischen Exaktheit

  Begriffe wie „Teile", „Breite", „Enden" wurden benötigt, aber nicht definiert

  Beispiel: Der „Punkt"

Entwicklung der Axiomatik in der ebenen Geometrie

- im 19. Jh. rügte Gauß den unkontrollierten Gebrauch von Anordnungsaxiomen in geometrischen Sätzen und Beweisen

  → diese hatte Euklid übersehen

  → Pasch nahm sie in seinem Werk auf

- erst Hilbert fasste diese und eigene Neuerungen in seinem Werk zusammen

4. David Hilbert

<u>Kurzbiographie:</u>

- 1862-1943
- deutscher Mathematiker
- entscheidende Beiträge zu vielen Gebieten der Mathematik
- vertrat harten Formalismus in der Mathematik: „Man muss jederzeit an Stelle von ‚*Punkte, Geraden, Ebenen*‘ ‚*Tische, Stühle, Bierseidel*‘ sagen können.“
- 1899 „Grundlagen der Geometrie“
- formulierte Liste von 23 (z.T. noch heute) ungelösten mathematischen Problemen

Zitat zur Person von D. Hilbert:

> „Hilbert war ein ruhiger, bäuerlicher Ostpreuße, seiner Stärke bewußt und dabei von echter Bescheidenheit. Er hatte sich nacheinander mit den schwierigsten Problemen auf jedem Gebiet der modernen Mathematik befaßt und auf jedem Gebiet einen großen Erfolg erzielt."

Aus: N. Wiener „Mathematik, mein Leben"

4.1 Das Axiomensystem von Hilbert

- Motivation:

  Hilbert ging es darum, vollkommene Klarheit über die Spielregeln der Mathematik zu schaffen: über die Definitionen, die Grundbegriffe, die Grammatik und die Sprache. Dies sollte jeden Dissens darüber, wie Mathematik zu betreiben ist, aus der Welt schaffen.

Entwicklung der Axiomatik in der ebenen Geometrie

- Merkmale:

  - Verzicht auf die Definition der Grundbegriffe. Sie werden vielmehr durch die Axiome als implizit definiert angesehen.

  - Hilbert nahm Annahmen, die Euklid machte, aber nicht als Axiome aufgenommen hatte und sich auch nicht beweisen ließen, in sein Axiomensystem auf. (Kongruenzaxiome)

  - Schließung von Lücken des euklidischen Systems, etwa durch Axiome der Anordnung.

  - **Unabhängigkeit, Vollständigkeit** und **Widerspruchsfreiheit** als Qualitätsmerkmale des Axiomensystems.

Entwicklung der Axiomatik in der ebenen Geometrie

- Die geometrischen Beweise dürfen an keiner Stelle in irgendeiner Weise von der Anschauung oder von Erfahrungstatsachen Gebrauch machen, sie dürfen lediglich auf die in den Axiomen festgelegte Beziehungen zwischen den undefinierten Grundbegriffen Bezug nehmen.

➔ Alle Beweise sollten im Prinzip so formalisiert sein, dass sie auch von einer Maschine durchgeführt werden können.

➔ Strenger Formalismus

Entwicklung der Axiomatik in der ebenen Geometrie

- Hilbert dachte sich drei **verschiedene Systeme** von „Dingen“:

  a) die **Punkte** (Elemente der linearen Geometrie)

  b) die **Geraden** (Elemente der ebenen Geometrie)

  c) die **Ebenen** (Elemente der räumlichen Geometrie)

- Diese Dinge betrachtete Hilbert in gegenseitigen Beziehungen: „liegen“, „zwischen“, „kongruent“ …

  Diese wurden in den Axiomen beschrieben.

Aufbau des Hilbertschen Axiomensystems:

8 Axiome der *Verknüpfung*

4 Axiome der *Anordnung („zwischen“)*

5 Axiome der *Kongruenz (Bsp.) (Bewegung)*

1 Axiom der *Parallelen (Formulierung)*

2 Axiome der *Stetigkeit (Bsp.)*

Entwicklung der Axiomatik in der ebenen Geometrie

<u>Axiome der Verknüpfung (Inzidenzaxiome)</u>
(→ Verknüpfung zwischen den Dingen)

(1) Zu zwei Punkten A, B gibt es stets eine Gerade a, die mit jedem der beiden Punkte A, B zusammengehört.

(2) Zu zwei Punkten A, B gibt es nicht mehr als eine Gerade, die mit jedem der beiden Punkte A, B zusammengehört.

(3) Auf einer Geraden gibt es stets wenigstens zwei Punkte. Es gibt wenigstens drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen.

Dieser Folie liegt eine Auswahl zugrunde. Die übrigen 5 Inzidenzaxiome sind deshalb zu vernachlässigen, da sie sich mit der Raumgeometrie befassen.

Axiome der Anordnung

(1) Wenn ein Punkt B zwischen einem Punkt A und einem Punkt C liegt, so sind A, B, C drei verschiedene Punkte einer Geraden, und B liegt dann auch zwischen C und A.

(2) Zu zwei Punkten A und C gibt es stets wenigstens einen Punkt B auf der Geraden AC, so dass C zwischen A und B liegt.

(3) Unter irgend drei Punkten einer Geraden gibt es nicht mehr als einen, der zwischen den beiden anderen liegt.

(4) Es seien A, B, C drei nicht in gerader Linie gelegene Punkte und a eine Gerade in der Ebene ABC, die keinen der Punkte A, B, C trifft: wenn dann die Gerade a durch einen Punkt der Strecke AB geht, so geht sie gewiss auch durch einen Punkt der Strecke AC oder durch einen Punkt der Strecke BC.

Die gerade erwähnten Axiome der Anordnung gab es bei Euklid nicht, somit hätte Euklid den folgenden Satz nicht aus seinem Axiomensystem herleiten können.

§4, Satz 3:

Zu zwei Punkten A und B gibt es stets wenigstens einen Punkt C auf der Geraden AB, der zwischen A und B liegt.

Beweis:

Nach Axiom I3 gibt es einen Punkt D außerhalb der Geraden AB, und nach A2 gibt es auf AD einen Punkt E, so dass D ein Punkt der Strecke AE ist. Nach demselben Axiom und nach Axiom A3 gibt es auf EB einen Punkt F, der nicht auf der Strecke EB liegt. Nach dem Axiom A4 muss die Gerade DF also die Strecke AB in einem Punkte C schneiden.

4.2 Zusammenfassung der Unterschiede:

1. Keine Grundbegriffsdefinitionen
2. Verzicht auf jegliche Anschauung
3. Einführung der Anordnungsaxiome
4. Aufnahme der Kongruenzaxiome in die Axiomatik
5. Rückführung der Widerspruchsfreiheit auf die der reellen Zahlen

- ➔ Beseitigung der Mängel von Euklid und Einfügen der Erkenntnisse aus 2000 Jahren Geometrie
- ➔ Neubegründung der Mathematik auf der formalen Logik
- ➔ Seine Axiomatik erlaubt sämtliche Typen von Geometrien in ihrem Aufbau und ihrer Bedingtheit klarzustellen

5. Andrej Nikolajewitsch Kolmogorov

Kurzbiographie:

- 1903 – 1987
- russischer Mathematiker
- engagierte sich für die Förderung begabter Kinder
- Begründer der axiomatischen Wahrscheinlichkeitsrechnung
- Arbeitsgebiete: Wahrscheinlichkeitsrechnung, Topologie, Komplexitätstheorie

5.1 Motivation Kolmogorovs:

- Vereinfachung des Axiomensystems durch eine stärkere Berück-sichtigung der aufgekommenen Mengenlehre.

5.2 Aufbau des Axiomensystems nach Kolmogorov (1960er Jahre):

4 Inzidenzaxiome
3 Abstandsaxiome
2 Anordnungsaxiome
1 Bewegungsaxiom
1 Parallelenaxiom

Unterschiede in den Axiomensystemen von Hilbert und Kolmogorov:

- Kolmogorov lehnt sein System an die Erkenntnisse von Richard Baldus an. Dieser wies zwar nach, dass Hilberts System „abgesichert" ist, fand aber auch heraus, dass es sich vereinfachen lies. Dies gelang dadurch, dass man nur die Punkte zu den Grundelementen machte und die Geraden (und die Ebenen) als Punktmengen einführt.

- Er definiert die Kongruenz über eine Bewegung, die zwei Punktmengen aufeinander abbildet. Auch für den Begriff der Bewegung hätte Hilbert der Begriff des Abstandes zur Verfügung stehen müssen bzw. die Bewegung hätte als Grundbegriff aufgeführt sein müssen.

  → dieses Vorgehen Kolmogorovs geht auf Friedrich Schur zurück

6. Fazit

- Kolmogorovs Axiomensystem unterscheidet sich von anderen momentan angewandten Axiomensystemen nur in der Einfachheit.
- Doch gelten Euklid und Hilbert immer noch als Vorbild und Vorläufer.
- So kann die Arbeit sowohl von Euklid als auch von Hilbert nicht überbewertet werden.

Entwicklung der Axiomatik in der ebenen Geometrie

- Die Elemente von Euklid enthalten den ersten überlieferten Versuch die Geometrie in ein Axiomensystem zu fassen.

- Sie hielten sich über 2000 Jahre und wurden zum meistverkauftesten Buch der Weltgeschichte nach der Bibel wurde.

- Die Elemente beeinflussten die Entwicklung der Wissenschaften so nachhaltig, wie kein anderes Werk.

Entwicklung der Axiomatik in der ebenen Geometrie

- Erst die geistige Entwicklung der letzten Jahrzehnte des 19. Jh. konnte sein Werk weiterführen bzw. verallgemeinern (zu einer strengeren Axiomatik führen), nicht aber auf die Grundfeste angreifen.

- Hilbert schaffte es dann die Korrekturen anzubringen, die sich aufgrund der allgemeinen mathematischen Entwicklung ergeben mussten.

- Die axiomatische Arbeitsweise wurde zur wichtigsten Methode in der Mathematik und ist es bis heute.

6. Quellen und Literatur (in Auswahl)

BECKER, Oskar: Grundlagen der Mathematik in geschichtlicher Entwicklung, Freiburg/München 1974.

BÖHM, J./BÖRNER, W./HERTEL, E./KRÖTENHEERDT, O./ MÖGLING, W./STAMMLER, L.: Geometrie, Berlin 1976.

CHAITIN, Gregory J.: Grenzen der Berechenbarkeit, in: Spektrum der Wissenschaft, 2004.

COLERUS, Egmont: Von Pythagoras bis Hilbert, Hamburg 1969.

EUKLID, Die Elemente, hg. v. Clemens Thaer, Darmstadt [5]1973.

FILLER, Andreas: Euklidische und Nichteuklidische Geometrie, Mannheim 1993.

HILBERT, David: Grundlagen der Geometrie, Stuttgart [12]1977.

KUNZ, Ernst: Ebene Geometrie, Hamburg 1976.

Entwicklung der Axiomatik in der ebenen Geometrie

MESCHKOWSKI, Herbert: Grundlagen der euklidischen Geometrie, Mannheim/Wien/Zürich ²1974.

SCHREIBER, Peter: Euklid, Leipzig 1987.

STÄCKEL, Paul/ENGEL, Friedrich: Die Theorie der Parallellinien, Leipzig 1895.

STRUIK, Dirk J.: Abriss der Geschichte der Mathematik, Braunschweig 1976.

ZEITLER, Herbert: Axiomatische Geometrie, München 1972.

ZEUTHEN, H.G.: Die Mathematik im Altertum und im Mittelalter, Stuttgart 1966.

______

www.ph-heidelberg.de/wp/filler/hub/elegeo/axiom.pdf zuletzt zugegriffen am 06.06.2006/11.00h

www.mathematik.uni-marburg.de/~tbauer/ft1_04s_
Kolmogorow.pdf
zuletzt zugegriffen am 06.06.2006/11.00h

Entwicklung der Axiomatik in der ebenen Geometrie

Beispiel:

Euklids erstes Problem (A.1):

Über eine gegebene Strecke ein gleichseitiges Dreieck zu errichten.

<u>Konstruktion:</u>

Die gegebene Strecke sei AB. Man soll über der Strecke AB ein gleichseitiges Dreieck errichten. Mit A als Mittelpunkt und AB als Abstand zeichne man den Kreis BCD (Post. 3), ebenso mit B als Mittelpunkt und BA als Abstand den Kreis ACE; ferner ziehe man vom Punkte C, in dem die Kreise einander schneiden, nach den Punkten A, B die Strecken CA, CB (Post. 1). Da Punkt A MP des Kreises CDB ist, ist AC=AB (I, Def. 15); ebenso ist, da Punkt B MP des Kreises CAE ist, BC=BA. Wie oben bewiesen, ist auch AC=AB; also sind CA und CB beide = AB. Was aber demselben gleich ist; ist auch einander gleich (Ax. 1); also ist auch CA=CB; also sind CA, AB, BC alle drei einander gleich.

➔ Das Dreieck ABC ist gleichseitig (I, Def. 20); und es ist über der gegebenen Strecke AB errichtet. Dies hat man ausführen sollen.

I, Definition 15:

„Ein Kreis ist eine ebene, von einer einzigen Linie [die Umfang heißt] umfaßte Figur mit der Eigenschaft, daß alle von einem innerhalb der Figur gelegenen Punkte bis zur Linie laufende Strecken einander gleich sind;“

I, Definition 16:

„Und Mittelpunkt des Kreises heißt dieser Punkt.“

I, Definition 20:

„Von den dreiseitigen Figuren ist ein **gleichseitiges** Dreieck jede mit drei gleichen Seiten, ein **gleichschenkliges** jede mit nur zwei gleichen Seiten, ein **schiefes** jede mit drei ungleichen Seiten."

Definition des Punktes nach Euklid:

„Ein Punkt ist, was keine Teile hat."

Im Hintergrund dieser Definition steht die Einstellung Platons, dass keine neuen Begriffe geschaffen werden sollen. Deshalb will Euklid nur abgrenzen, was bereits existiert. Er setzt also die Anschauung voraus und hebt nur einige Teile hervor. Wer nicht weiß, was ein Punkt ist, wird es aus Euklids Definition auch nicht lernen.

1. Axiom der Kongruenz:

Wenn A, B zwei Punkte auf einer Geraden a und ferner A�much ein Punkt auf derselben oder einer anderen Geraden a‘ ist, so kann man auf einer gegebenen Seite der Geraden a‘ von A‘ stets einen Punkt B‘ finden, so dass die Strecke AB der Strecke A‘B‘ kongruent oder gleich ist.

Parallelenaxiom:

Es sei a eine beliebige Gerade und A ein Punkt außerhalb von a, dann gibt es in der durch a und A bestimmten Ebene höchstens eine Gerade, die durch A läuft und a nicht schneidet.

1. Stetigkeitsaxiom:

Sind AB und CD irgendwelche Strecken, so gibt es eine Anzahl n derart, dass das n-malige Hintereinander-Abtragen der Strecke CD von A aus auf den durch B gehenden Halbstrahl über den Punkt b hinausführt.

1. Abstandsaxiom

Zu zwei beliebigen Punkten A und B gibt es eine nichtnegative reelle Zahl d mit d=0 gdw. A=B.

(Diese Zahl wird als Abstand der Punkte A und B bezeichnet.)