Kapitel 4: Dreiecke, Vierecke, Polygone

Einteilung der Dreiecke

Einteilung der Dreiecke

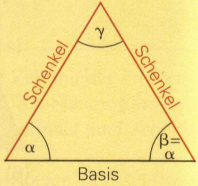
(1) Nach Seitenlängen:

a) **Ungleichseitiges Dreieck:** Die drei Seiten sind unterschiedlich lang.

b) **Gleichschenkliges Dreieck:** Zwei Seiten sind gleich lang. Die beiden gleichlangen Seiten bezeichnet man als **Schenkel**, die dritte Seite als **Basis**.

c) **Gleichseitiges Dreieck:** Die drei Seiten sind gleich lang.

Gleichschenkliges Dreieck



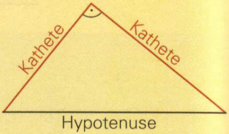
(2) Nach Winkelarten:

a) **Spitzwinkliges Dreieck:** Alle Winkel des Dreiecks sind spitze Winkel.

b) **Stumpfwinkliges Dreieck:** Ein Winkel ist stumpf, d. h. größer als 90°.

c) **Rechtwinkliges Dreieck:** Das Dreieck besitzt einen rechten Winkel. Die beiden Seiten, die den rechten Winkel einschließen, heißen **Katheten**, die Seite, die dem rechten Winkel gegenüberliegt, heißt **Hypotenuse**.

Rechtwinkliges Dreieck



[Kra2-166]

Winkelsumme

Die Vermutung, dass die **Winkelsumme** in jedem Dreieck **genau 180°** beträgt, lässt sich auch **beweisen:**

Zeichne ein beliebiges Dreieck ABC!
Ziehe durch A die Parallele zu BC (→ Fig. 172)!
Drücke zunächst in Worten aus, was du siehst!

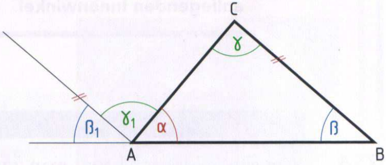


Fig. 172

Überlege:

Die Winkel β und β_1 sind gleich große **Parallelwinkel**, ebenso γ und γ_1.
Somit gilt: $\beta_1 = \beta$ und $\gamma_1 = \gamma$.
Aus der Zeichnung folgt außerdem:

$$\beta_1 + \gamma_1 + \alpha = 180°.$$

Da $\beta_1 = \beta$ und $\gamma_1 = \gamma$, gilt: $\beta + \gamma + \alpha = 180°$

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$

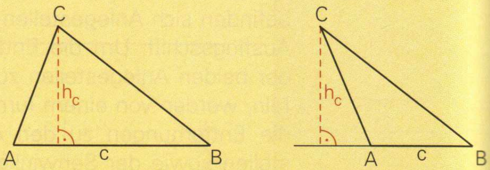
Die Winkelsumme im Dreieck

In jedem Dreieck ist die Summe der drei Innenwinkel 180°.

[Rei2-183]

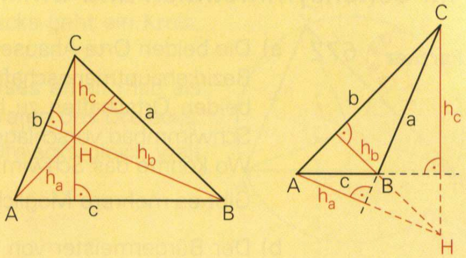
Höhen und Höhenschnittpunkt

Im Dreieck nennt man den kürzesten Abstand eines Eckpunkts zur gegenüberliegenden Seite bzw. ihrer Verlängerung **Höhe**.
Jedes Dreieck besitzt drei Höhen.



[Kra2-178]

In jedem Dreieck schneiden einander die Höhen bzw. die Verlängerungen der Höhen in genau einem Punkt, dem **Höhenschnittpunkt H** des Dreiecks.

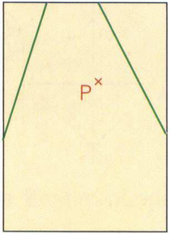


[Kra2-179a]

Praktische Anwendung

Zwei Geraden g und h schneiden einander außerhalb des Zeichenblatts im Punkt S. P liegt weder auf g noch auf h. Verbinde P mit S.

Anleitung: Fasse P als Höhenschnittpunkt eines Dreiecks und S als Eckpunkt dieses Dreiecks auf. Es ist sicher sehr hilfreich, wenn du dir zuerst eine Skizze eines Dreiecks machst und den Höhenschnitt einzeichnest. Vergleiche dann die Skizze mit deiner Angabe.



[Kra2-179b]

3.3 Die Streckensymmetrale

a) Nimm einen Punkt A und eine Gerade g beliebig an! Spiegle A an g und bezeichne den Bildpunkt mit B (→ Fig. 148 a)!

Die Strecke AB steht normal auf g und wird von ihr in zwei gleich lange Teile geteilt. Sie liegt also symmetrisch bezüglich der Geraden g.

Man nennt die Gerade g deshalb auch die **Symmetrale der Strecke AB** (→ Fig. 148 b) oder die **Streckensymmetrale von AB** (**s_{AB}**).

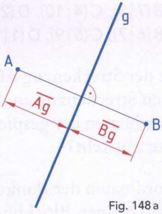


Fig. 148 a

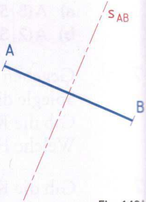


Fig. 148 b

b) Nimm auf der Streckensymmetrale s_{AB} einige Punkte an! Gib ihre Entfernung von A bzw. von B an (→ Fig. 148 c)!

Du kannst feststellen:
Jeder Punkt auf der Streckensymmetrale s_{AB} ist von den Endpunkten der Strecke AB **gleich weit** entfernt.

Umgekehrt liegt jeder Punkt, der von A und von B gleich weit entfernt ist, auf der Streckensymmetrale s_{AB} (→ Fig. 148 c):

$\overline{X_1 A} = \overline{X_1 B}$, $\quad \overline{X_2 A} = \overline{X_2 B}$, $\quad \overline{X_3 A} = \overline{X_3 B}$.

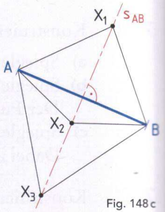


Fig. 148 c

c) Wir können daher schreiben: $s_{AB} = \{X \mid \overline{XA} = \overline{XB}\}$

[Rei2-176]

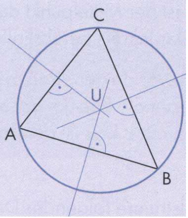
Umkreismittelpunkt und Umkreis

Umkreismittelpunkt

Wenn man für jede Seite eines Dreiecks die Streckensymmetrale konstruiert, schneiden sie einander in einem Punkt.

Dieser Punkt (U) ist der Mittelpunkt des Umkreises des Dreiecks.

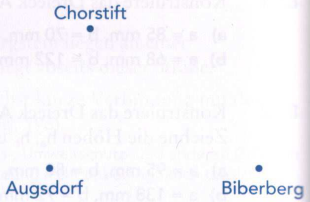
Alle drei Eckpunkte des Dreiecks liegen auf der Kreislinie.



[Box2-139]

Die Seitensymmetralen:

Die Orte Augsdorf, Biberberg und Chorstift wollen einen gemeinsamen Getreidespeicher errichten, der von allen drei Orten gleich weit entfernt liegt (→ Fig. 201).
Gibt es überhaupt einen solchen Platz?
Gibt es gar mehrere solcher Plätze?



[Rei2-200a]

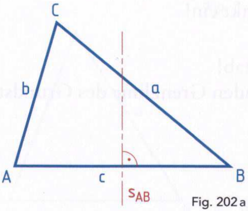


Fig. 202 a

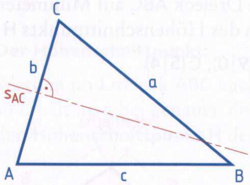


Fig. 202 b

Das Dreieck ABC in Fig. 202 a stellt ein **„mathematisches Modell"** dieser Aufgabe dar. Wir suchen einen **Punkt**, der von den **Eckpunkten** A, B und C des Dreiecks **gleich weit entfernt** ist.

Du weißt bereits, dass alle Punkte, die von A und B gleich weit entfernt sind, auf der **Streckensymmetrale s_{AB}** liegen (→ Fig. 202 a).

Die Streckensymmetrale wird in diesem Fall auch **Seitensymmetrale** genannt, da hier die Strecke AB die Seite eines Dreiecks bezeichnet.

Genauso liegen alle Punkte, die von A und C gleich weit entfernt sind, auf der **Seitensymmetrale s_{AC}** (→ Fig. 202 b).

Schneidet man nun die beiden Seitensymmetralen s_{AB} und s_{AC}, so ist ihr **Schnittpunkt gleich weit von den Eckpunkten A, B und C entfernt.**

Zeichnet man noch die **dritte Seitensymmetrale s_{BC}** ein, so erkennt man bei genauer Zeichnung, dass die **drei Seitensymmetralen** einander **in genau einem Punkt schneiden.**

■ Begründe mit eigenen Worten, warum das so sein muss!

[Rei2-200b]

Der Umkreis des Dreiecks:

Der **Schnittpunkt der drei Seitensymmetralen** ist von den **Eckpunkten** des Dreiecks **gleich weit entfernt.**
Er ist daher **Mittelpunkt eines Kreises,** der **durch alle drei Eckpunkte** verläuft.

Man nennt diesen Kreis den **Umkreis des Dreiecks** und bezeichnet seinen **Mittelpunkt** mit **U** (→ Fig. 203).

Der Abstand des **Umkreismittelpunkts U** von den Eckpunkten des Dreiecks ABC ist der **Umkreisradius r.**

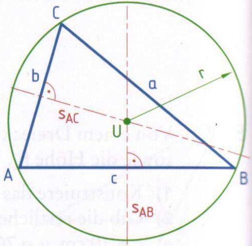


Fig. 203

Der Umkreismittelpunkt

Jedes Dreieck besitzt einen **Umkreis.**

Man erhält den **Mittelpunkt des Umkreises** als **Schnittpunkt der Seitensymmetralen** des Dreiecks.

[Rei2-200c]

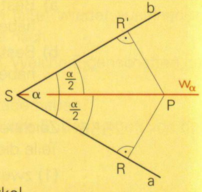
Beweis für die Existenz des Höhenschnittpunkts:

1. Gegeben: ein Dreieck $\triangle ABC$.
2. Zeichne die Höhen (von denen wir noch nicht wissen, dass sie einen gemeinsamen Schnittpunkt besitzen) und die Parallelen p_a, p_b und p_c zu den Dreiecksseiten durch den jeweils gegenüberliegenden Eckpunkt.
3. Die drei Geraden p_a, p_b und p_c begrenzen ein Dreieck, dessen Eckpunkt wir mit A', B' und C' bezeichnen.
4. Das Dreieck $\triangle A'B'C'$ besteht aus 4 zu $\triangle ABC$ kongruenten Dreiecken (Beweis!).
5. Die Höhen des Dreiecks $\triangle ABC$ sind genau die Seitensymmetralen des Dreiecks $\triangle A'B'C'$, welche sich (wie wir bereits bewiesen haben) in einem Punkt, nämlich dem Umkreismittelpunkt von $\triangle A'B'C'$ schneiden. Dieser ist zugleich der Schnittpunkt H der Höhen des Dreiecks $\triangle ABC$.

Winkelsymmetrale

Gegeben ist ein Winkel α mit Scheitel S.

Den Strahl mit dem Anfangspunkt S, der den Winkel in zwei gleich große Teilwinkel zerlegt, nennt man **die Winkelsymmetrale w_α** des Winkels α. Sie ist die Symmetrieachse des Winkels α.

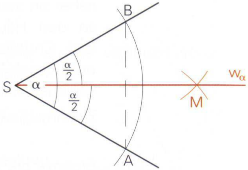


Alle Punkte der Winkelsymmetrale sind von den Schenkeln des Winkels gleich weit entfernt.
Man konstruiert eine Winkelsymmetrale mit dem Zirkel.

Konstruktion der Winkelsymmetrale mit dem Zirkel

Führe die **Konstruktion der Winkelsymmetrale w_α** des Winkels α mit dem Scheitel S nach folgender Anleitung aus.

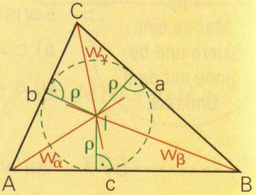
1. Zeichne einen Kreis um S mit beliebigem Radius. Bezeichne die Schnittpunkte des Kreises mit den Schenkeln mit A und B.
2. Zeichne die Strecke AB ein.
3. Konstruiere die Streckensymmetrale der Strecke AB.
4. Überlege: Die Streckensymmetrale der Strecke AB ist Symmetrieachse des Dreiecks ABS. Daher halbiert sie den Winkel an der Ecke S.
5. Der Strahl SM ist daher die gesuchte Winkelsymmetrale.



[Kra2-146]

Inkreismittelpunkt und Inkreis

Für jedes Dreieck ABC gibt es einen Kreis, der die drei Seiten des Dreiecks innen berührt. Man nennt ihn **Inkreis des Dreiecks ABC**.
Den **Inkreismittelpunkt I** erhält man als Schnittpunkt der Winkelsymmetralen des Dreiecks.
Der Inkreismittelpunkt I hat von allen Dreiecksseiten denselben Abstand.
Der **Inkreisradius ρ** (Berührradius) ist der Normalabstand des Punktes I von den Dreiecksseiten.



[Kra2-182]

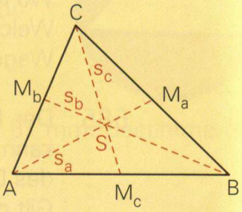
Die drei *Ankreise* eines Dreiecks berühren jeweils eine Dreiecksseite sowie die Verlängerungen der beiden anderen Seiten.

Schwerlinien und Schwerpunkt

In einem Dreieck ABC nennt man die Verbindungsstrecken zwischen einem Eckpunkt und dem Seitenmittelpunkt der gegenüberliegenden Dreiecksseite **Schwerlinie**.

Üblicherweise werden diese mit s_a, s_b, s_c bezeichnet.

Die Schwerlinien schneiden sich in jedem Dreieck in einem Punkt, dem **Schwerpunkt S**.



[Kra2-184]

Satz (7)

Die drei Schwerlinien eines Dreiecks schneiden sich in einem gemeinsamen Punkt S, dem Schwerpunkt, und S teilt jede "Schwerlinie" (d.h. die Strecke, die innerhalb des Dreiecks liegt) im Verhältnis $1 : 2$.

Merkwürdige Punkte des Dreiecks – Die Euler'sche Gerade

Die merkwürdigen Punkte des Dreiecks:

Im Allgemeinen haben **drei Gerade**, die nicht parallel liegen, in der Zeichenebene **drei Schnittpunkte**. Es ist daher **bemerkenswert (merkwürdig)**, dass in jedem Dreieck

1. die **drei Höhen** (bzw. ihre Verlängerungen),
2. die **drei Seitensymmetralen**,
3. die **drei Winkelsymmetralen** und
4. die **drei Schwerlinien**

jeweils durch einen gemeinsamen Punkt gehen.

Der **Höhenschnittpunkt H**, der **Umkreismittelpunkt U**, der **Inkreismittelpunkt I** und der **Schwerpunkt S** zählen daher zu den so genannten **merkwürdigen Punkten des Dreiecks**.

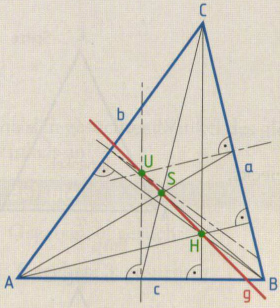


Fig. 210

Die Euler'sche Gerade:

Der **Höhenschnittpunkt H**, der **Umkreismittelpunkt U** und der **Schwerpunkt S** liegen außerdem stets auf einer **gemeinsamen Geraden g** (→ Fig. 210).

Diese Gerade wird zu Ehren des bedeutenden Schweizer Mathematikers **Leonhard Euler** (1707 – 1783) die **Euler'sche Gerade** genannt.

Der **Inkreismittelpunkt I** liegt – außer in Sonderfällen – **nicht** auf dieser besonderen Geraden.

Leonhard Euler

[Rei2-205]

Satz 12: Der Schwerpunkt S eines Dreiecks, sein Umkreismittelpunkt M und sein Höhenschnittpunkt H liegen auf einer Geraden, der *Eulerschen Geraden*. Dabei liegt S zwischen M und H und es gilt: $l(\overline{HS}) = 2 \cdot l(\overline{SM})$.

Beweis:

Im Falle eines gleichseitigen Dreiecks gilt H = S = M. Diesen uninteressanten Fall wollen wir ausschließen. Wir gehen also von $S \neq M$ aus. Durch diese beiden Punkte ist eine Gerade festgelegt, die wie e nennen.

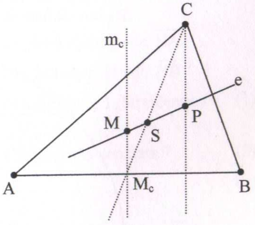


Abb.106

Auf e, genauer auf der Halbgeraden $\overrightarrow{MS}$, suchen wir den Punkt P, für den gilt $l(\overline{PS}) = 2 \cdot l(\overline{SM})$. Wir müssen nun zeigen, dass P der Höhenschnittpunkt H ist.

Wir wissen:

$$l(\overline{PS}) = 2 \cdot l(\overline{SM}) \Leftrightarrow l(\overline{PS}) : l(\overline{SM}) = 2:1 \quad (1) \quad \text{/ Wahl von P}$$

$$\wedge \quad l(\overline{CS}) = 2 \cdot l(\overline{SM_c}) \Leftrightarrow l(\overline{CS}) : l(\overline{SM_c}) = 2:1 \quad (2) \quad \text{/ Satz 8}$$

Aus (1) und (2) folgt:

$$l(\overline{PS}) : l(\overline{SM}) = l(\overline{CS}) : l(\overline{SM_c})$$

$\Rightarrow$ $PC \parallel m_c$ / Umkehrung 1. Strahlensatz

$\Rightarrow$ $PC \perp c$ / $m_c \perp c$, Kap. 3, Satz 10, Teil 2

$\Rightarrow$ $P \in h_c$ / $PC \perp c$ und $P,C \in PC$

[Müller-Philipp-209]

Satz 13: Die Seitenmittelpunkte M_a, M_b, M_c, die Höhenfußpunkte H_a, H_b, H_c und die Mittelpunkte P_a, P_b, P_c der Strecken $\overline{HA}$, $\overline{HB}$, $\overline{HC}$, wobei H der Höhenschnittpunkt ist, liegen auf einem Kreis, dem *Feuerbachschen Kreis* (Abbildung 107). Der Mittelpunkt M_f des Feuerbachschen Kreises liegt ebenfalls auf der Eulerschen Geraden und zwar in der Mitte von $\overline{HM}$. Er ist der Umkreis des Mittendreiecks, und sein Radius ist halb so groß wie der des Umkreises.

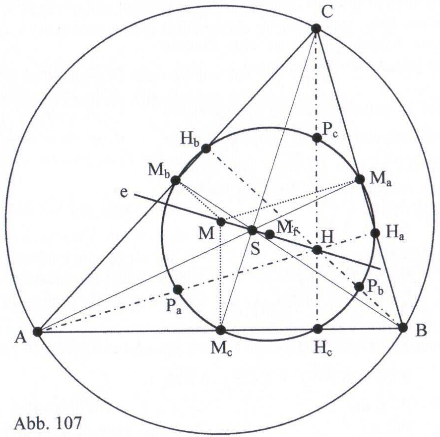
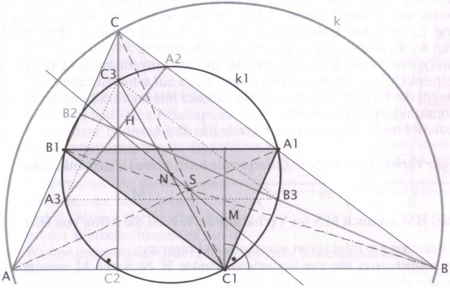


Abb. 107

[Müller-Philipp-210]

Ein Dreieck ABC wird durch die zentrische Streckung $Z(S; -\frac{1}{2})$ am Schwerpunkt S mit dem Faktor $k = -\frac{1}{2}$ auf sein Mittendreieck $A_1B_1C_1$ abgebildet.



Aufgabe 2:
Gegeben ist das Dreieck ABC mit den Seitenmitten A_1, B_1 und C_1, den Höhenfußpunkten A_2, B_2 und C_2, der Umkreismitte M, dem Höhenschnittpunkt H und dem Schwerpunkt S.

a) Bilden Sie das Dreieck ABC durch die zentrische Streckung $\alpha = Z(S; -\frac{1}{2})$ ab.

In welche Punkte werden dabei A, B und C abgebildet?
In welche Geraden werden die Höhengeraden h_a, h_b bzw. h_c abgebildet?
In welchen Punkt X geht dabei also der Höhenschnittpunkt H über?
Wie müssen folglich H, S und X zueinander liegen?
Was ist bei dieser Streckung α das Bild k_1 des Umkreises k von Dreieck ABC?
Wo liegt der Bildpunkt N von M, also die Umkreismitte des Mittendreiecks?

[Krauter-215]

Der Satz von Thales

Der Satz von Thales

Jeder **Winkel im Halbkreis** ist ein **rechter Winkel**.

Beweis für den Satz von Thales:

Konstruiere ein beliebiges rechtwinkliges Dreieck nach dem Satz von Thales (➔ Fig. 222)!
Gehe für die Beweisführung folgendermaßen vor (➔ Fig. 223):

1. Verbinde C mit M!

2. $\triangle AMC$ und $\triangle MBC$ sind gleichschenklig.
Begründe, weshalb!
Daraus folgt: $\sphericalangle ACM = \alpha$ und $\sphericalangle MCB = \beta$.

3. Betrachte $\triangle ABC$:

$$\alpha + \beta + \underbrace{(\alpha + \beta)}_{\gamma} = 180° \Rightarrow 2 \cdot (\alpha + \beta) = 180° \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha + \beta = 90° \Rightarrow \gamma = 90°$$

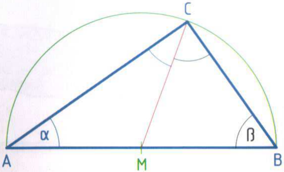


Fig. 223

[Rei2-211]

Peripheriewinkelsatz

Zeichne einen Kreis k und eine Sehne AB dieses Kreises, die kein Durchmesser ist!
A und B begrenzen einen längeren Bogen b_1 und einen kürzeren Bogen b_2 (→ Fig. 279 a, b).

Nimm auf dem (längeren) Bogen b_1 mehrere Punkte $S_1, S_2, S_3, \ldots$ an (→ Fig. 279 a)!

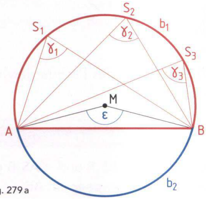


Fig. 279 a

Nimm auf dem (kürzeren) Bogen b_2 mehrere Punkte $R_1, R_2, R_3, \ldots$ an (→ Fig. 279 b)!

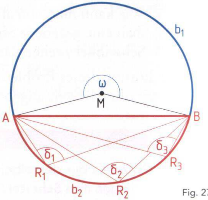


Fig. 279 b

Zeichne die Winkel $\gamma_1 = \sphericalangle AS_1B$, $\gamma_2 = \sphericalangle AS_2B$, $\gamma_3 = \sphericalangle AS_3B$, … und miss sie! Miss auch den **Zentriwinkel** $\varepsilon = \sphericalangle AMB$ und vergleiche ihn mit den Winkeln $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \ldots$!

Zeichne die Winkel $\delta_1 = \sphericalangle AR_1B$, $\delta_2 = \sphericalangle AR_2B$, $\delta_3 = \sphericalangle AR_3B$, … und miss sie! Miss auch den erhabenen **Zentriwinkel** $\omega = \sphericalangle AMB$ und vergleiche ihn mit den Winkeln $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots$!

Welche Vermutungen kannst du aussprechen?

Es gilt der so genannte **Peripheriewinkelsatz**:

Der Peripheriewinkelsatz

Peripheriewinkel, die ihren Scheitel auf **demselben Kreisbogen** b haben, sind **gleich groß**. Sie sind **halb so groß** wie der zu diesem Kreisbogen gehörende **Zentriwinkel**.

Zwei Peripheriewinkel sind **supplementär**, wenn ihre Scheitel auf **verschiedenen Kreisbögen** b_1 und b_2 liegen, wobei einander b_1 und b_2 zum Kreis k ergänzen.

[Rei2-225]

Beweis für den Peripheriewinkelsatz:

Wir beschränken uns auf den Beweis des einfachsten Falls (→ Fig. 280).
Zu zeigen ist, dass der Zentriwinkel ε doppelt so groß ist, wie der Peripheriewinkel γ.

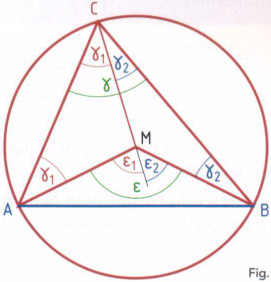


Fig. 280

Überlege folgendermaßen (→ Fig. 280):

1) Der Radius MC teilt γ in die zwei Teilwinkel γ_1 und γ_2.

2) Da $\triangle$ AMC und $\triangle$ CMB gleichschenklig sind, gilt: $\sphericalangle CAM = \gamma_1$ und $\sphericalangle MBC = \gamma_2$.

3) Verlängert man den Radius MC über M hinaus, so wird der Zentriwinkel ε in die zwei Teilwinkel ε_1 und ε_2 geteilt.

4) ε_1 ist Außenwinkel des Dreiecks AMC. Daraus folgt: $\varepsilon_1 = 2 \cdot \gamma_1$. Gleiches gilt für $\triangle$ MBC: $\varepsilon_2 = 2 \cdot \gamma_2$.
Daraus folgt: $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 2 \cdot \gamma_1 + 2 \cdot \gamma_2 = 2 \cdot \gamma$.
Der Zentriwinkel ε ist doppelt so groß wie der zugehörige Peripheriewinkel γ.

5) Da der Punkt C beliebig gewählt worden ist, folgt außerdem: Über derselben Sehne ist jeder Peripheriewinkel gleich groß.

Bemerkung: Streng genommen sind noch zwei weitere typische Fälle zu beachten:
1) M liegt auf AB (→ Aufgabe 857); **2)** M liegt außerhalb des Dreiecks ABC.
In gleicher Weise wie in den Punkten 1) bis 5) kann man für jeden erhabenen Zentriwinkel ω beweisen, dass er doppelt so groß wie jeder seiner zugehörigen Peripheriewinkel ist (→ Fig. 279 b).

[Rei2-226a]

Umkehrung des Peripheriewinkelsatzes

Wenn zwei über derselben **Strecke AB errichtete Winkel** $\sphericalangle AS_1B$ und $\sphericalangle AS_2B$ **gleich groß** sind, dann liegen ihre **Scheitel** S_1 und S_2 auf **demselben Kreisbogenpaar** um AB.

Überlege: Spiegelt man den Peripheriewinkelbogen b_1 an der Strecke AB, so erhält man einen zweiten Bogen b_2. Auf dem Kreisbogenpaar $b = b_1 \cup b_2$ befinden sich alle in Frage kommenden Punkte (→ Fig. 282).

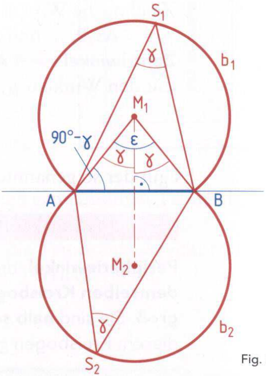


Fig. 282

Der Sehwinkel

Alle Punkte, von denen aus man die Strecke AB **unter demselben Winkel** γ sehen kann, liegen auf dem **Kreisbogenpaar** $b = b_1 \cup b_2$ mit dem Zentriwinkel $\varepsilon = 2\gamma$.

In Mengenschreibweise:

$$b = b_1 \cup b_2 = \{S \mid \sphericalangle ASB = \gamma\}$$

[Rei2-226b]

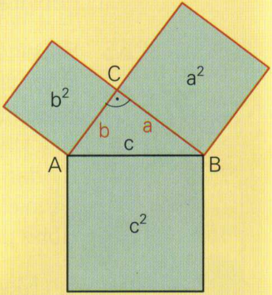
Die Sätze des Pythagoras

Satz von Pythagoras

Wenn ein Dreieck ABC *rechtwinklig* ist, dann ist die Summe der Flächeninhalte der beiden Katheten-quadrate so groß wie der Flächeninhalt des Quadrats über der Hypotenuse.

Wenn man die Längen der Katheten mit a und b und die Länge der Hypotenuse mit c bezeichnet, kann man schreiben:

$$a^2 + b^2 = c^2$$



Umkehrung des Satzes von Pythagoras

Wenn in einem Dreieck mit den Seiten a, b und c die Beziehung $a^2 + b^2 = c^2$ gilt, dann ist derjenige Winkel, der c gegenüberliegt, ein rechter Winkel.

[Kra4-72]

Begründung für die Richtigkeit des Satzes von Pythagoras:

Der Satz von Pythagoras ist eine Behauptung für sämtliche rechtwinklige Dreiecke.

In der mathematischen Literatur gibt es mehr als **300 verschiedene Beweise** für den **„pythagoreischen Lehrsatz"**. Einen davon kannst du im Folgenden selbst nachvollziehen.

1) Zeichne vier kongruente rechtwinklige Dreiecke mit $\gamma = 90°$ und schneide sie aus!

2) Lege diese Dreiecke so, dass dadurch ein Quadrat DEFC mit der Seitenlänge $a + b$ entsteht (→ Fig. 197)!

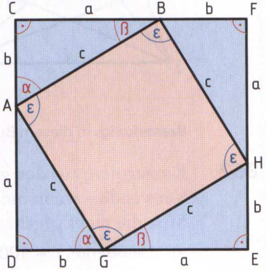


Fig. 197

3) Die vier Dreiecke schließen ein Viereck AGHB mit vier gleich langen Seiten c ein.
Dieses Viereck ist ein Quadrat, da $\varepsilon = 90°$ ist:

$$\left.\begin{aligned} \alpha + \varepsilon + \beta &= 180° \\ \alpha + \beta &= 90° \end{aligned}\right\} \Rightarrow \varepsilon = 90°$$

4) Die vier kongruenten rechtwinkligen Dreiecke füllen mit dem Quadrat AGHB das Quadrat DEFC mit der Seitenlänge $a + b$ aus. Für die Flächeninhalte gilt daher:

$$A(\square DEFC) = 4 \cdot A(\triangle ABC) + A(\square AGHB)$$

$$(a + b)^2 = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot b + c^2$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2 \quad | -2ab$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

[Rei3-209]

Die Umkehrung des pythagoreischen Lehrsatzes:

Zeige, dass jedes Dreieck, für dessen Seitenlängen a, b und c die Beziehung $a^2 + b^2 = c^2$ gilt, rechtwinklig ist!

1) Nimm an, dass für ein ganz beliebiges Dreieck (➔ Fig. 138 a) gilt: $a^2 + b^2 = c^2$!

2) Konstruiere mit denselben Seitenlängen a und b ein rechtwinkliges Dreieck und benenne dessen Hypotenuse z. B. mit x (➔ Fig. 138 b)!
Da dieses Dreieck rechtwinklig ist, muss gelten:
$a^2 + b^2 = x^2$
Andererseits ist laut Annahme auch $a^2 + b^2 = c^2$.

3) Schließe daraus, dass c = x sein muss!

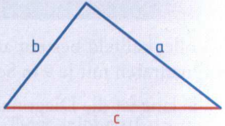


Fig. 138 a

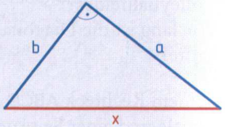


Fig. 138 b

[Rei4-163]

Der Kathetensatz:

Die Höhe h (= h_c) eines rechtwinkligen Dreiecks teilt die Hypotenuse c in zwei Abschnitte (→ Fig. 128).

Diese **Hypotenusenabschnitte** werden üblicherweise so benannt, dass p der Seite a und q der Seite b anliegt.

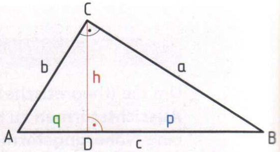


Fig. 128

Begründe mit Hilfe der Winkel, dass für das rechtwinklige Dreieck ABC gilt (→ Fig. 128):

$$\triangle ABC \sim \triangle ADC \Rightarrow b : q = c : b \Rightarrow b^2 = c \cdot q$$
$$\triangle ABC \sim \triangle DBC \Rightarrow a : p = c : a \Rightarrow a^2 = c \cdot p$$

Kathetensatz

In jedem **rechtwinkligen Dreieck ABC** gilt: $a^2 = c \cdot p$ und $b^2 = c \cdot q$

Kurzsprechweise:
Quadrat einer Kathete = Hypotenuse mal anliegendem Hypotenusenabschnitt

[Rei4-160a]

Der Höhensatz:

Mit Hilfe der Ähnlichkeit der beiden Teildreiecke ADC und DBC des rechtwinkligen Dreiecks ABC können wir die Höhe h des Dreiecks ABC berechnen (→ Fig. 130):

Begründe selbst!

$h : q = p : h \Rightarrow h^2 = p \cdot q$

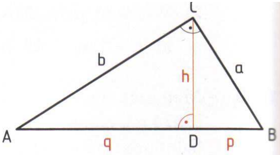


Fig. 130

Höhensatz

In jedem **rechtwinkligen Dreieck ABC** gilt: $\boxed{h^2 = p \cdot q}$

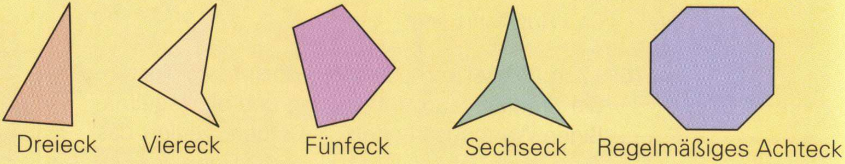
Kurzsprechweise:

Quadrat der Höhe = Produkt der Hypotenusenabschnitte

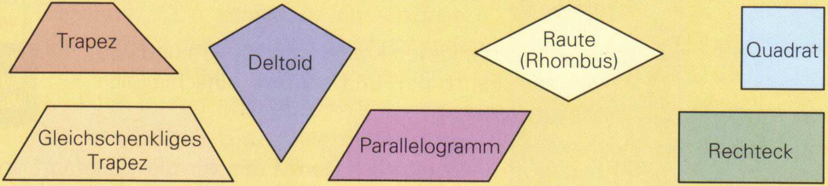
[Rei4-160b]

Polygone (= Drei-, Vier-, Vielecke)

Wenn der Umriss einer ebenen Figur aus geradlinigen **Seiten** besteht, spricht man von einem **Vieleck** (**Polygon**).



Für einige spezielle Vierecke gibt es besondere Namen:



[Kra2-214]

Definition (11)

Es sei $(\mathcal{E}, \mathcal{G})$ eine Euklidische Ebene.

a) Es seien $2 \leq n \in \mathbb{N}$ und $P_1, \ldots, P_n \in \mathcal{E}$. Dann heißt $\mathcal{P} := \bigcup_{i=1}^{n-1} \overset{\vdash\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!\dashv}{P_i P_{i+1}}$ der durch die Punkte $P_1, \ldots, P_n$ bestimmte *Polygonzug* der *Länge* $n-1$.
$\mathcal{P}$ heißt *geschlossener Polygonzug*, wenn $P_n = P_1$ ist.
$\mathcal{P}$ heißt *einfacher Polygonzug*, wenn für alle $1 \leq i < j \leq n-1$ gilt:

$$\overset{\vdash\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!\dashv}{P_i P_{i+1}} \cap \overset{\vdash\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!\dashv}{P_j P_{j+1}} = \begin{cases} \{P_{i+1}\} & \text{falls } j = i+1 \\ \{P_1\} & \text{falls } i = 1,\ j = n-1,\ P_1 = P_n \text{ ist} \\ \emptyset & \text{sonst} \end{cases}$$

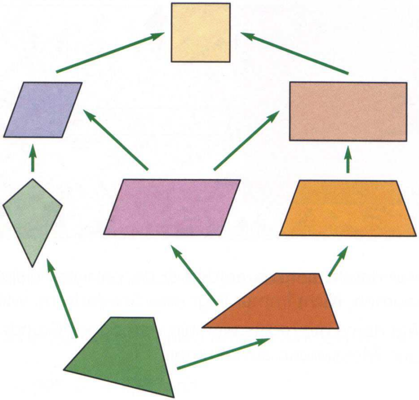
Eine kompakte Teilmenge $A \subset \mathcal{E}$, die von einem einfachen, geschlossenen Polygonzug der Länge $n \geq 3$ begrenzt wird, heißt ein *n-Eck* (n-gon, Polygon).

b) Eine Teilmenge $K \subset \mathcal{E}$ heißt *konvex*, wenn für alle $P_1, P_2 \in K$ gilt: $\overset{\vdash\!\dashv}{P_1 P_2} \subset K$.

10.6 Das Haus der Vierecke

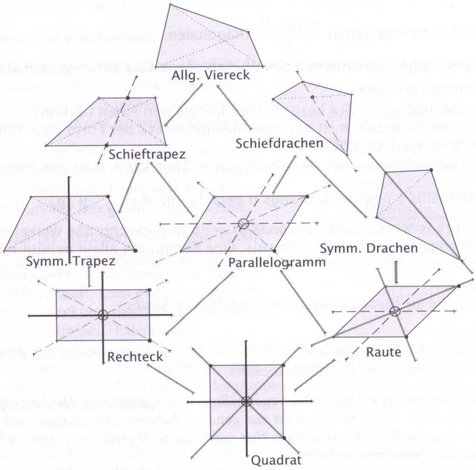
Du hast in den vergangenen Kapiteln eine Menge über verschiedene spezielle Vierecke gelernt. Das Diagramm, das sogenannte Haus der Vierecke, zeigt einen Zusammenhang zwischen diesen Vierecken.
Besondere Eigenschaften werden nach dieser Ordnung weitergegeben, d. h. das nachfolgende Viereck kann immer als Sonderfall des vorangegangenen Vierecks gesehen werden.
Außerdem nimmt die Anzahl der Bestimmungsstücke, die zum Konstruieren notwendig sind, von unten nach oben ab.

Eines der Vierecke dieses Diagramms, das allgemeine Viereck ganz unten, welches keine besonderen Eigenschaften hat, kennst du noch nicht. Darüber erfährst du einiges im nächsten Kapitel.

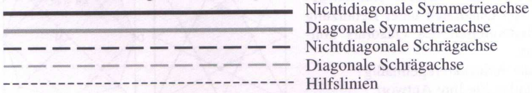


[Kra2-229]

Das „Haus der Vierecke“



Die Achsen in den Figuren haben folgende Bedeutung:



[Krau-79]