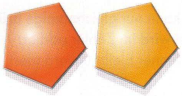
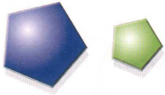
3: Bewegungen und Ähnlichkeiten:

Was sind kongruente (bzw. deckungsgleiche) Figuren?

Kongruente Figuren

Wenn Figuren genau **deckungsgleich** sind, nennt man sie **kongruent**.
Sie haben **gleiche Form** und **gleiche Größe**.
Es entsteht eine 1:1– Kopie.



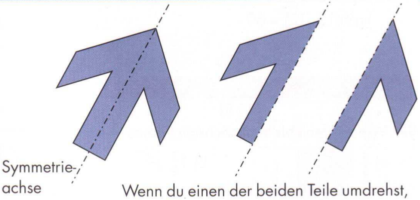


Figuren, die zwar die gleiche Form, aber verschiedene Größe haben, nennt man **ähnlich**.
(Wie Vergrößerungen oder Verkleinerungen beim Kopieren)

Symmetrische Figuren

Wenn man eine Figur durch mindestens eine Gerade – die **Symmetrieachse** – in kongruente Teile zerlegen kann, nennt man sie **symmetrisch**.

Manche Figuren haben auch mehrere Symmetrieachsen.



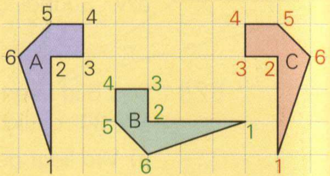
Wenn du einen der beiden Teile umdrehst, ist er mit dem anderen deckungsgleich.

[Box2-94]

Zwei Figuren A und B heißen genau dann zueinander **kongruent** (deckungsgleich), wenn sie in der Form und in den Maßen übereinstimmen.

Man schreibt: A ≅ B

Gelesen: A ist kongruent zu B.



Die Figuren A und C bzw. B und C sind auch zueinander kongruent, denn sie stimmen in Form und Maßen überein.
Man sieht aber im Bild, dass die Figur C das Spiegelbild der Figur A bzw. B ist. Solche Figuren nennt man **ungleichsinnig kongruent**.

Die Nummerierung der entsprechenden Ecken erfolgt bei Figur A und Figur B im gleichen Umlaufsinn (**gleichsinnig kongruent**), bei Figur A und Figur C bzw. Figur B und Figur C einmal gegen den Uhrzeigersinn und einmal im Uhrzeigersinn (**ungleichsinnig kongruent**).

[Kra2-138]

1. **Symmetrisch liegende Teile einer Figur:**

In Fig. 143 liegen die zwei Teile der Figur **symmetrisch bezüglich der Geraden g.**
Faltet man die Zeichnung längs der Geraden g, so kommen die beiden Teile aufeinander zu liegen.
Die beiden Teile sind **deckungsgleich (kongruent).**

Hinweis: congruere (lat.) … übereinstimmen, zusammentreffen.

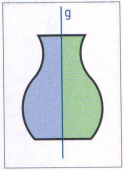


Fig. 143

2. **Symmetrisch liegende Punkte:**

Falte ein Blatt Papier längs einer Geraden g (→ Fig. 144 a)!
Zeichne auf das gefaltete Papier einen geschlossenen Streckenzug und benenne seine Eckpunkte mit A, B und C! Stich (z. B. mit der Zirkelspitze) durch die Eckpunkte!
Beim Entfalten erhältst du Punkte, die zu A, B und C **symmetrisch (spiegelbildlich) liegen.**
Benenne sie mit A_1, B_1 bzw. C_1 und verbinde diese Punkte (→ Fig. 144 b)!

[Rei2-173a]

Symmetrisch liegende Punkte

1. **Zwei Punkte**, die bezüglich einer Geraden g **symmetrisch liegen**, haben **denselben Abstand** von g.
2. Die **Verbindungsstrecke** dieser Punkte steht **normal** auf g.

3. **Kongruente Figuren:**

Die zur Geraden g symmetrisch liegenden geschlossenen Streckenzüge ABCA und $A_1B_1C_1A_1$ sind kongruent (→ Fig. 145).

Man schreibt ABCA ≅ $A_1B_1C_1A_1$ **und spricht**: „Der Streckenzug ABCA ist **kongruent** zum Streckenzug $A_1B_1C_1A_1$." Beachte, dass sich der **Umlaufsinn** der Punkte A, B, C (**Gegenuhrzeigersinn**) bei der Spiegelung **ändert**. Die Punkte A_1, B_1, C_1 folgen im **Uhrzeigersinn** aufeinander (→ Fig. 145).

[Rei2-173b]

Zwei Teilmengen M, M' einer Euklidischen Ebene $(\mathcal{E}, \mathcal{G})$ heißen *kongruent*, wenn sie durch eine *Bewegung* ineinander übergeführt werden; d.h. es gibt eine *Bewegung* $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ mit $\varphi(M) = M'$.

Satz (4)

Es sei $(\mathcal{E}, \mathcal{G})$ eine Euklidische Ebene und $g \in \mathcal{G}$. Dann existiert genau eine Abbildung $S_g : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ mit folgenden Eigenschaften:

GS1) *für alle $P \in g$ gilt: $S_g(P) = P$*

GS2) *für alle $P \notin g$ gilt: ist $h \in \mathcal{G}$ die (eindeutig bestimmte) Gerade mit $P \in h$ und $h \perp g$, und ist $g \cap h = \{S\}$, so ist $S_g(P) := P'$ der (eindeutig bestimmte) Punkt $P' \in h$ mit $\ell(\overset{\longmapsto}{PS}) = \ell(\overset{\longmapsto}{P'S})$ und $P' \neq P$.*

Die Abbildung S_g heißt dann die Spiegelung an der Geraden g.

Definition (7) (Bewegung I.)

Es sei $(\mathcal{E}, \mathcal{G})$ eine Euklidische Ebene. Eine Abbildung $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ heißt eine *Bewegung*, wenn es Geraden $g_1, \ldots, g_k \in \mathcal{G}$ gibt, sodass $f = S_{g_k} \circ \cdots \circ S_{g_2} \circ S_{g_1}$ gilt.

Satz (5)

Jede Hintereinanderausführung von 4 Geradenspiegelungen lässt sich als Verknüpfung von höchstens 2 Geradenspiegelungen darstellen und ist daher eine Translation oder eine Rotation.

Korollar

Jede Bewegung (im Sinne von Definition I.) lässt sich als Verknüpfung von höchstens 3 Geradenspiegelungen darstellen und ist daher:
eine Geradenspiegelung oder eine Translation oder eine Rotation oder eine Schubspiegelung.

I. Synthetischer Zugang

Definition (7) (Bewegung I.)

Es sei $(\mathcal{E}, \mathcal{G})$ eine Euklidische Ebene. Eine Abbildung $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ heißt eine *Bewegung*, wenn es Geraden $g_1, \ldots, g_k \in \mathcal{G}$ gibt, sodass $f = S_{g_k} \circ \cdots \circ S_{g_2} \circ S_{g_1}$ gilt.

Satz (5)

Jede Hintereinanderausführung von 4 Geradenspiegelungen lässt sich als Verknüpfung von höchstens 2 Geradenspiegelungen darstellen und ist daher eine Translation oder eine Rotation.

Korollar

Jede Bewegung (im Sinne von Definition I.) lässt sich als Verknüpfung von höchstens 3 Geradenspiegelungen darstellen und ist daher:
eine Geradenspiegelung oder eine Translation oder eine Rotation oder eine Schubspiegelung.

Definition (7) (Bewegung I.)

Es sei $(\mathcal{E}, \mathcal{G})$ eine Euklidische Ebene. Eine Abbildung $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ heißt eine *Bewegung*, wenn es Geraden $g_1, \dots, g_k \in \mathcal{G}$ gibt, sodass $f = S_{g_k} \circ \cdots \circ S_{g_2} \circ S_{g_1}$ gilt.

Satz (5)

Jede Hintereinanderausführung von 4 Geradenspiegelungen lässt sich als Verknüpfung von höchstens 2 Geradenspiegelungen darstellen und ist daher eine Translation oder eine Rotation.

Korollar

Jede Bewegung (im Sinne von Definition I.) lässt sich als Verknüpfung von höchstens 3 Geradenspiegelungen darstellen und ist daher:
eine Geradenspiegelung oder eine Translation oder eine Rotation oder eine Schubspiegelung.

II. Längentreue Abbildungen

Definition (8) (Bewegung II.)

Es sei $(\mathcal{E}, \mathcal{G})$ eine Euklidische Ebene. Eine Abbildung $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ heißt eine *Bewegung*, wenn für alle $A, B \in \mathcal{E}$ gilt:

$$\ell(\overset{\longmapsto\!\!\dashv}{AB}) = \ell(\overset{\longmapsto\!\!\dashv}{f(A)f(B)}) ,$$

d.h.: f ist eine *längentreue Abbildung* (oder: eine *Isometrie*).

Satz (6)

Es sei $(\mathcal{E}, \mathcal{G})$ eine Euklidische Ebene. Eine Abbildung $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ ist genau dann eine Bewegung nach Definition I., wenn sie eine Bewegung nach Definition II. ist.

II. Längentreue Abbildungen

Definition (8) (Bewegung II.)

Es sei $(\mathcal{E}, \mathcal{G})$ eine Euklidische Ebene. Eine Abbildung $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ heißt eine *Bewegung*, wenn für alle $A, B \in \mathcal{E}$ gilt:

$$\ell(\overset{\longmapsto\!\dashv}{AB}) = \ell(\overset{\longmapsto\!\dashv}{f(A)f(B)}) ,$$

d.h.: f ist eine *längentreue Abbildung* (oder: eine *Isometrie*).

Satz (6)

Es sei $(\mathcal{E}, \mathcal{G})$ eine Euklidische Ebene. Eine Abbildung $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ ist genau dann eine Bewegung nach Definition I., wenn sie eine Bewegung nach Definition II. ist.

III. Orthogonale affine Abbildungen

Definition (9) (Bewegung III.)

Es sei $(\mathcal{E}, \mathcal{G})$ eine Euklidische Ebene, die (mittels eines ON-Koordinatensystems) als 2-dimensionaler affiner Raum über $\mathbb{R}$ aufgefasst werde. Eine Bewegung ist eine affine Abbildung $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ (vgl. Definition 6), deren zugehörige lineare Abbildung φ *orthogonal* ist.

Satz (vgl. Lineare Algebra)

$\mathbb{R}^n$ sei mit dem Standardskalarprodukt (und der Euklidischen Norm) versehen. Für eine lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sind folgende Aussagen äquivalent:
a) φ ist orthogonal.
b) Für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt: $||\varphi(x)|| = ||x||$.
c) Für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt: $\varphi(x) \cdot \varphi(y) = x \cdot y$.
d) Bezüglich einer/jeder ON-Basis des $\mathbb{R}^n$ wird φ durch eine orthogonale Matrix beschrieben.

III. Orthogonale affine Abbildungen

Definition (9) (Bewegung III.)

Es sei $(\mathcal{E}, \mathcal{G})$ eine Euklidische Ebene, die (mittels eines ON-Koordinatensystems) als 2-dimensionaler affiner Raum über $\mathbb{R}$ aufgefasst werde. Eine Bewegung ist eine affine Abbildung $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ (vgl. Definition 6), deren zugehörige lineare Abbildung φ *orthogonal* ist.

Satz (vgl. Lineare Algebra)

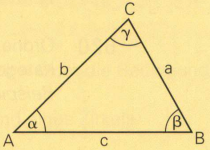
$\mathbb{R}^n$ sei mit dem Standardskalarprodukt (und der Euklidischen Norm) versehen. Für eine lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sind folgende Aussagen äquivalent:
a) φ ist orthogonal.
b) Für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt: $||\varphi(x)|| = ||x||$.
c) Für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt: $\varphi(x) \cdot \varphi(y) = x \cdot y$.
d) Bezüglich einer/jeder ON-Basis des $\mathbb{R}^n$ wird φ durch eine orthogonale Matrix beschrieben.

Kongruenzsätze in der Schule

Was ist ein Dreieck?

Bezeichnung von Dreiecken

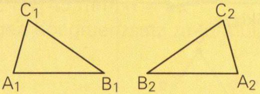
- Dreiecke werden mithilfe ihrer Eckpunkte angegeben. Man schreibt Dreieck ABC oder $\triangle$ ABC. Die Eckpunkte eines Dreiecks bezeichnet man gegen den Uhrzeigersinn mit aufeinanderfolgenden Großbuchstaben A, B, C.
- Die Seiten, die den Ecken gegenüberliegen, werden mit den entsprechenden Kleinbuchstaben a, b, c bezeichnet.
- Die Winkel in den Eckpunkten A, B, C bekommen die griechischen Buchstaben α („ALPHA"), β („BETA"), γ („GAMMA").



[Kra2-165]

Zwei Dreiecke $A_1B_1C_1$ und $A_2B_2C_2$, die deckungsgleich sind, heißen **kongruent**.

Man schreibt: $\triangle A_1B_1C_1 \cong \triangle A_2B_2C_2$.



Zwei Figuren heißen **ungleichsinnig kongruent**, wenn man die eine Figur umdrehen muss, damit sie deckungsgleich auf die andere Figur passt. Muss man dies nicht tun, dann heißen die beiden Figuren **gleichsinnig kongruent**.

[Kra2-171]

4. Der Seiten-Seiten-Seiten-Satz:

Jeder Schüler der Klasse hat ein Dreieck mit $a = 30$ mm, $b = 24$ mm und $c = 42$ mm konstruier
Sind diese Dreiecke alle „gleich"?
Lässt die Angabe der drei Seitenlängen eine **eindeutige Dreieckskonstruktion** zu?
Wie könnte man das überprüfen?

1) Du kennst schon die Methode des **Ausschneidens** und **Auflegens**:
Wenn zwei Dreiecke „aufeinanderpassen", dann sind sie **deckungsgleich (kongruent)**.

2) Zeichne auf ein Blatt Papier zwei Dreiecke ABC und $A_1B_1C_1$ mit denselben Seitenlängen!
Du kannst dich durch **Parallelverschieben** und **Drehen** überzeugen, dass die beiden Dreiecke **kongruent** sind: $\triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C_1$.

Wenn in zwei Dreiecken die drei Seitenlängen übereinstimmen, dann sind auch die einander entsprechenden Winkel jeweils gleich groß. Es gilt folgender **Kongruenzsatz**:

Der Seiten-Seiten-Seiten-Satz (SSS-Satz)

Zwei Dreiecke, die in ihren **drei Seitenlängen** übereinstimmen, sind **kongruent**.

Du kannst diesen **Kongruenzsatz** auch als **Konstruktionssatz** formulieren:

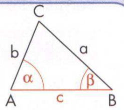
Dreieckskonstruktion aus den drei Seitenlängen

Ist ein **Dreieck** durch seine **drei Seitenlängen** gegeben, dann ist es **eindeutig konstruierbar** (sofern die Dreiecksungleichung erfüllt ist).

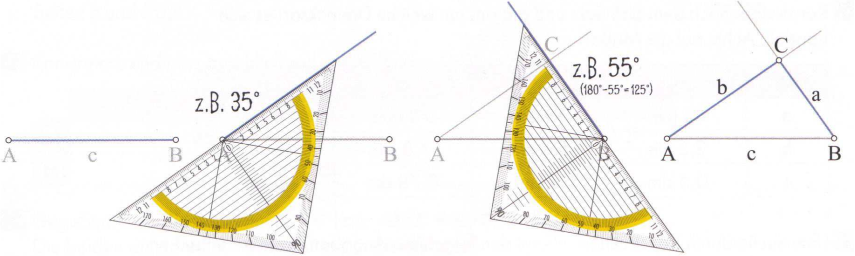
[Rei2-188]

Winkel-Seiten-Winkel-Satz (WSW-Satz)

Zwei Dreiecke sind **kongruent**, wenn sie in **einer Seite** und den **beiden anliegenden Winkeln** (zB c, α und β) übereinstimmen.



1. Zeichne zuerst die Seite c.
2. Miss den ersten Winkel und zeichne einen Strahl.
3. Miss den zweiten Winkel und zeichne einen zweiten Strahl.
4. Der Schnittpunkt der Strahlen ergibt C.



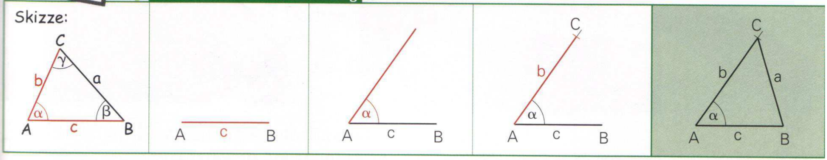
[Box2-135]

8.3.3 Seiten-Winkel-Seiten-Satz

646 Von einem Dreieck ABC ist gegeben: $c = 35$ mm, $b = 43$ mm, $\alpha = 55°$
Konstruiere das Dreieck. Versuche, den zugehörigen Kongruenzsatz zu formulieren. Denk daran, eine Skizze zu machen.

Lösungsvorschlag

Konstruktionsbeschreibung



Information

SWS-Satz (Seiten-Winkel-Seiten-Satz)

Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in den Längen zweier Seiten und in dem von den beiden Seiten eingeschlossenen Winkel übereinstimmen.

Oder:

Ein Dreieck lässt sich eindeutig konstruieren, wenn man die Längen zweier Seiten und den Winkel, der von diesen Seiten eingeschlossen wird, kennt.

[Kra2-173]

8.3.5 Seiten-Seiten-Winkel-Satz

659 a) Konstruiere das Dreieck ABC mit $c = 30$ mm, $b = 36$ mm, $\beta = 45°$.

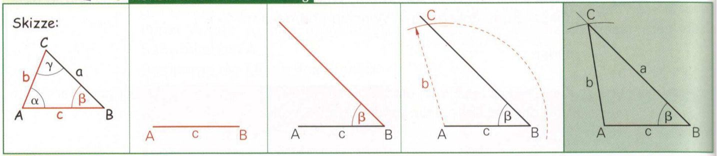
b) Konstruiere das Dreieck ABC mit $c = 30$ mm, $b = 23$ mm, $\beta = 45°$.

c) Was ist dir bei der Konstruktion der beiden Dreiecke aufgefallen?
Gibt es zur Angabe immer nur eine Lösung?
Versuche, eine Formulierung für den zugehörigen Kongruenzsatz zu finden.

Lösungsvorschlag

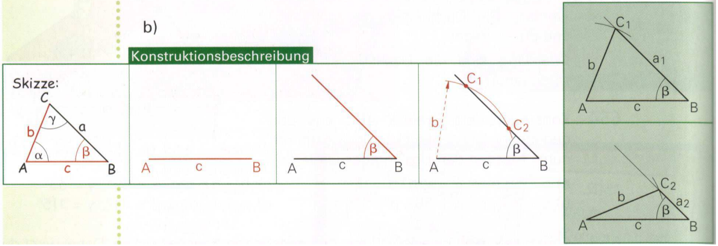
a)

Konstruktionsbeschreibung



b)

Konstruktionsbeschreibung



[Kra2-176]

SsW-Satz (Seiten-Seiten-Winkel-Satz)
Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in den Längen zweier Seiten und dem der **längeren Seite** gegenüberliegenden Winkel übereinstimmen.

Oder:

Ein Dreieck lässt sich eindeutig konstruieren, wenn die Längen zweier Seiten und der Winkel, der der **längeren Seite** gegenüberliegt, gegeben sind.

[Kra2-177]

Was bedeuten die Kongruenzsätze?

a) Stimmen zwei Dreiecke in den jeweiligen Bestimmungsstücken überein, so sind sie kongruent (und die Bewegung, die sie aufeinander abbildet, ist eindeutig bestimmt!)

b) Mit den jeweiligen Bestimmungsstücken ist ein Dreieck "eindeutig" gegeben.

Ähnlichkeiten

Was heißt „gleiche Gestalt haben" bzw. „ähnlich sein"? Denke z. B. an Dreiecke!

Besonders deutlich wird die **Ähnlichkeit** bei der Projektion eines Dias auf einen Schirm, wenn dieser parallel zum Dia steht (→ Fig. 152).

Die Abmessungen der Figur (die Längen der Dreiecksseiten) auf dem Schirm sind umso größer, je weiter der Schirm vom Dia entfernt ist (→ Fig. 152).

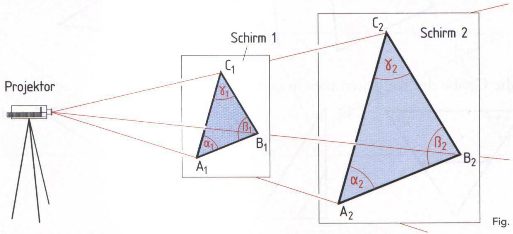


Fig. 152

Dabei gilt:
Einander **entsprechende Winkel** sind immer **gleich groß**. (Z. B. in Fig. 152 die Dreieckswinkel α_1 und α_2, β_1 und β_2, γ_1 und γ_2)

Wir sagen: Die Dreiecke $A_1B_1C_1$ und $A_2B_2C_2$ sind **ähnlich**.

Wir schreiben: $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A_2B_2C_2$

Bemerkung: Das Zeichen „$\cong$" für **„kongruent"** drückt aus, dass kongruente Figuren gleiche Gestalt haben und gleich groß sind. Die Kongruenz ist also ein Sonderfall der Ähnlichkeit.

Ähnliche Dreiecke

Zwei Dreiecke heißen **ähnlich,** wenn **einander entsprechende Winkel gleich groß** sind.

[Rei3-191]

Genügt als Begründung für die Ähnlichkeit von Vier- und Vielecken wie bei Dreiecken der Nachweis der Gleichheit einander entsprechender Winkel?

Antwort: Nein! **Begründung:**

Beispiel	**Gegenbeispiel**

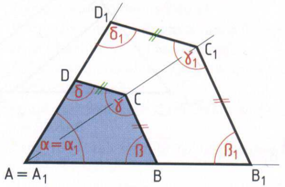


Fig. 175 a

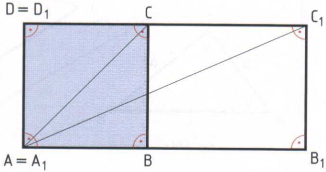


Fig. 175 b

In Fig. 175 a sind die Vierecke ABCD und $A_1B_1C_1D_1$ **ähnlich**. (Einander entsprechende Winkel sind gleich groß.)
Die Teildreiecke ABC und $A_1B_1C_1$ sowie ACD und $A_1C_1D_1$ in Fig. 175 a sind **ähnlich**.

Die Rechtecke ABCD und $A_1B_1C_1D_1$ (→ Fig. 175 b) sind **nicht ähnlich**, obwohl einander entsprechende Winkel gleich groß sind. (Alle Winkel sind 90°.)
Die Teildreiecke ABC und $A_1B_1C_1$ sowie ACD und $A_1C_1D_1$ in Fig. 175 b sind **nicht ähnlich**.

Für die **Ähnlichkeit beliebiger Vier- und Vielecke** muss man daher außer der Gleichheit entsprechender Winkel noch **zusätzliche Eigenschaften** verlangen, z. B. die Ähnlichkeit einander entsprechender Teildreiecke.

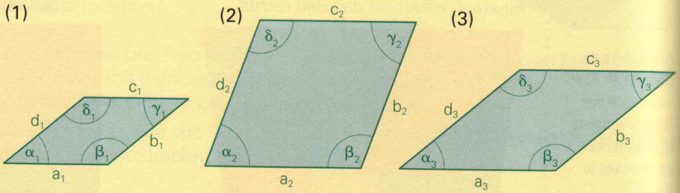
[Rei3-200]

Bei ähnlichen Figuren sind entsprechende Winkel gleich groß und entsprechende Streckenlängen stehen im gleichen Verhältnis zueinander.

Die Längen einander entsprechender Strecken in ähnlichen Figuren erhält man durch Multiplikation jeder Länge mit der Zahl **k**, dem **Ähnlichkeitsfaktor**.

Beispiele:

(1) (2) (3)



Vergleich der Figuren 1 und 2:

- Vergleich der Seitenlängen

$a_1 = b_1 = c_1 = d_1 = 2$ cm

$a_2 = b_2 = c_2 = d_2 = 3$ cm

$\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = \frac{c_2}{c_1} = \frac{d_2}{d_1} = \frac{3}{2}$

- Vergleich der Winkel $\alpha_1 \neq \alpha_2$

Die Figuren 1 und 2 sind nicht ähnlich.

Vergleich der Figuren 1 und 3:

- Vergleich der Seitenlängen

$a_1 = b_1 = c_1 = d_1 = 2$ cm

$a_3 = b_3 = c_3 = d_3 = 3$ cm

$\frac{a_3}{a_1} = \frac{b_3}{b_1} = \frac{c_3}{c_1} = \frac{d_3}{d_1} = \frac{3}{2}$

- Vergleich der Winkel

$\alpha_1 = \alpha_3$; $\beta_1 = \beta_3$; $\gamma_1 = \gamma_3$; $\delta_1 = \delta_3$

Die Figuren 1 und 3 sind ähnlich.

Man schreibt: Figur 1 ~ Figur 3

Der Ähnlichkeitsfaktor ist $\frac{3}{2}$.

[Kra3-152]

Definition (10)

Es sei $(\mathcal{E}, \mathcal{G})$ eine Euklidische Ebene. Eine Abbildung $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ heißt eine *Ähnlichkeit*, wenn für alle $A, B, C \in \mathcal{E}$ gilt:

$$\sphericalangle\, ABC = \sphericalangle\, f(A)f(B)f(C)\ .$$

Äquivalent dazu ist: Wenn es eine positive Konstante $c > 0$ gibt, sodass für alle $A, B \in \mathcal{E}$ gilt:

$$\ell(\overline{f(A)f(B)}) = c\,\ell(\overline{AB})\ .$$

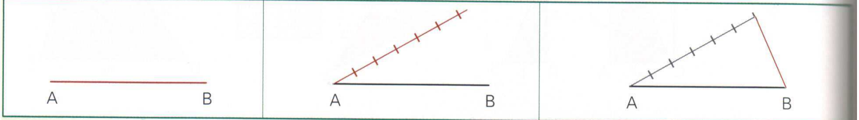
(c heißt der *Streckungsfaktor* der Ähnlichkeit f.)

Teilung einer Strecke in gleich lange Teile

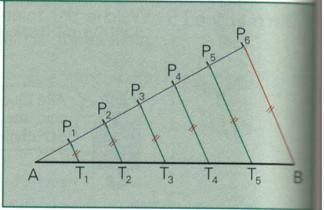
4.4.1 Teilen einer Strecke

Partner **618** Die Strecke AB mit $\overline{AB} = 7$ cm soll durch Konstruktion in 6 gleich lange Teile geteilt werden. Die Lehrerin erklärt und zeigt an der Tafel die einzelnen Schritte.

Konstruktionsbeschreibung



- Zeichnet zuerst die Strecke AB.
- Zeichnet einen beliebigen Strahl mit dem Anfangspunkt A, auf dem ihr 6 gleich lange Strecken auftragt. Die Länge der Strecken könnt ihr beliebig wählen. Ihr erhaltet 6 Punkte.
- Verbindet nun den Punkt P_6 mit dem Punkt B.
- Zeichnet durch die Punkte P_1, P_2, P_3, P_4 und P_5 Parallelen zu BP_6.



a) Führt die Konstruktion in eurem Heft durch und zeigt durch Abmessen, dass die Teile die gleiche Länge haben.

[Kra3-156]

Der Strahlensatz:

a) In Fig. 162 wurde die Strecke SA_2 in sieben gleich große Teile geteilt.

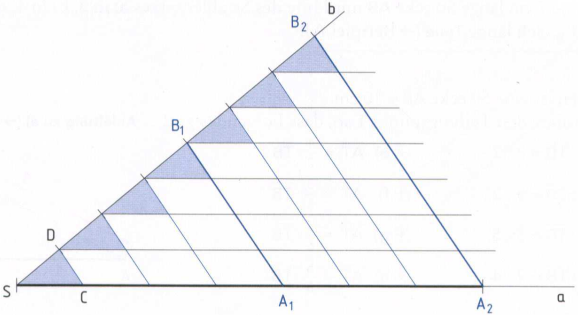


Fig. 162

Es gilt daher: $\overline{SA_2} = 7 \cdot \overline{SC}$

Ferner ist: $\overline{SA_1} = 4 \cdot \overline{SC}$

Wir können nun folgende Proportionen bilden:

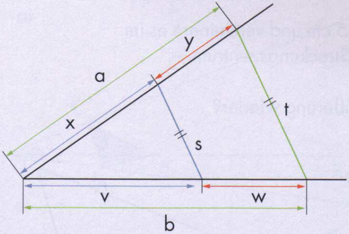
1) $\left.\begin{array}{l} \overline{SA_1} : \overline{SA_2} = (4 \cdot \overline{SC}) : (7 \cdot \overline{SC}) = \dfrac{4 \cdot \overline{SC}}{7 \cdot \overline{SC}} = 4 : 7 \\ \overline{SB_1} : \overline{SB_2} = (4 \cdot \overline{SD}) : (7 \cdot \overline{SD}) = \dfrac{4 \cdot \overline{SD}}{7 \cdot \overline{SD}} = 4 : 7 \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{\overline{SA_1} : \overline{SA_2} = \overline{SB_1} : \overline{SB_2}}$

2) $\overline{SA_1} : \overline{A_1A_2} = 4 : 3 \quad \overline{SB_1} : \overline{B_1B_2} = 4 : 3 \quad \Rightarrow \mathbf{\overline{SA_1} : \overline{A_1A_2} = \overline{SB_1} : \overline{B_1B_2}}$

[Rei3-195a]

Der Strahlensatz

Strahlensätze



Werden zwei **Strahlen** mit einem gemeinsamen Anfangspunkt von zwei **parallelen Geraden** geschnitten, so ergeben sich **mehrere Verhältnisgleichungen (Proportionen)**.

Man spricht in diesem Zusammenhang von **Strahlensätzen**.

1. Form $\quad v : b = x : a$ und $v : w = x : y$
2. Form $\quad s : t = v : b$ und $s : t = x : a$

[Box3-174]

Strahlensätze

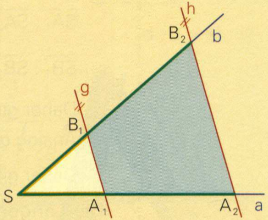
Gegeben sind zwei Strahlen a und b mit dem gemeinsamen Anfangspunkt S, die von zwei parallelen Geraden g und h geschnitten werden.

Erster Strahlensatz

(1a) $\overline{SA_1} : \overline{SA_2} = \overline{SB_1} : \overline{SB_2}$

(1b) $\overline{SA_1} : \overline{A_1A_2} = \overline{SB_1} : \overline{B_1B_2}$

Die Längen zweier Strecken auf dem einen Strahl verhalten sich wie die Längen der entsprechenden Strecken auf dem anderen Strahl.

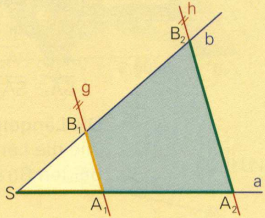


Zweiter Strahlensatz

(2a) $\overline{A_1B_1} : \overline{A_2B_2} = \overline{SA_1} : \overline{SA_2}$

(2b) $\overline{A_1B_1} : \overline{A_2B_2} = \overline{SB_1} : \overline{SB_2}$

Die Längen der Strecken auf den beiden parallelen Geraden verhalten sich wie die Längen der entsprechenden von S ausgehenden Strecken auf den beiden Strahlen.



Weiter: diese Sätze gelten auch, wenn die Parallelen g und h auf zwei verschiedenen Seiten von S liegen. [Kra3-157]

Strahlensatz

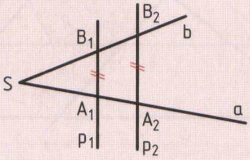


Fig. 163

Werden zwei Strahlen a und b mit dem gemeinsamen Anfangspunkt S von zwei parallelen Geraden p_1 und p_2 geschnitten, so gilt der **Strahlensatz**.

1. Form des Strahlensatzes

Die Längen zweier Abschnitte auf dem einen Strahl verhalten sich wie die Längen der entsprechenden Abschnitte auf dem anderen Strahl.

$$\overline{SA_1} : \overline{SA_2} = \overline{SB_1} : \overline{SB_2}$$
$$\overline{SA_1} : \overline{A_1A_2} = \overline{SB_1} : \overline{B_1B_2}$$

2. Form des Strahlensatzes

Die Abschnitte auf den parallelen Geraden verhalten sich wie die entsprechenden, von S ausgehenden Strecken auf jedem der beiden Strahlen.

$$\overline{A_1B_1} : \overline{A_2B_2} = \begin{cases} \overline{SA_1} : \overline{SA_2} \\ \overline{SB_1} : \overline{SB_2} \end{cases}$$

[Rei3-195b]

Vergrößern, Verkleinern, Maßstab

Beim **Vergrößern** oder **Verkleinern** von Figuren sollen **Original und Bild ähnlich** zueinander sein.

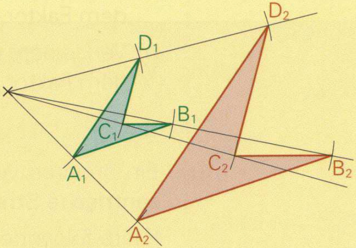
Einander entsprechende Längenstücke zweier zueinander ähnlicher Figuren stehen im gleichen Verhältnis. Die Winkel des Bildes und des Originals stimmen überein.

$\overline{A_2B_2} : \overline{A_1B_1} = \overline{B_2C_2} : \overline{B_1C_1} = \overline{C_2D_2} : \overline{C_1D_1} = \ldots = k : 1 = k$

$\overline{A_2B_2} = k \cdot \overline{A_1B_1}, \quad \overline{B_2C_2} = k \cdot \overline{B_1C_1}, \quad \overline{C_2D_2} = k \cdot \overline{C_1D_1}, \ldots$

Die Längen einander entsprechender Strecken in ähnlichen Figuren erhält man durch Multiplikation der einen Länge mit der gleichen Zahl **k**, dem sogenannten **Ähnlichkeitsfaktor**.

Ist **k > 1** (**Vergrößerungsfaktor**), wird die zweite Figur größer als die Ausgangsfigur.
Ist **k < 1** (**Verkleinerungsfaktor**), dann wird die zweite Figur kleiner als die Ausgangsfigur.

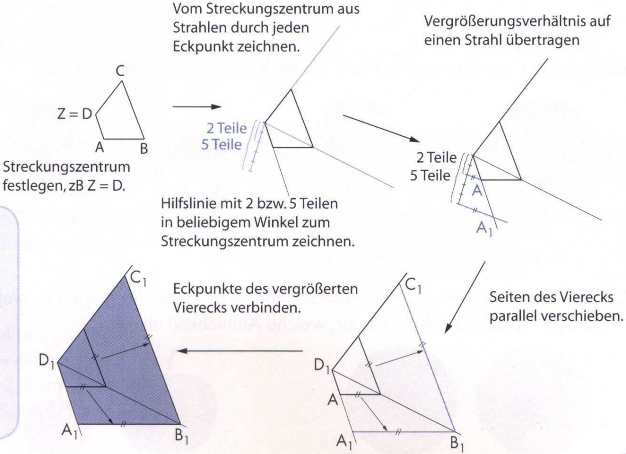


[Kra3-163]

Figuren vergrößern bzw. verkleinern

Mithilfe der Streckenteilung kann man Figuren auch vergrößern und verkleinern. Dazu bestimmt man ein Streckungszentrum. Das kann auch ein Punkt der Figur sein.

zB Vergrößere das Viereck ABCD im Verhältnis 2 : 5 !
Altes Viereck ABCD:
2 Teile: neues Viereck $A_1B_1C_1D_1$:
5 Teile



[Box3-169]