Geometrie und ihre Didaktik für LAK
Kapitel 1: Grundlagen der Elementargeometrie und Axiomatik

Karin Baur

Institut für Mathematik und wissenschaftliches Rechnen
Karl-Franzens-Universität Graz

621.237 Vorlesung im WS 2012/13
(gem. mit Michaela KRAKER)
Unterlagen zusammengestellt von G. Lettl

1. Grundlagen der Elementargeometrie und Axiomatik:

Was ist ein Punkt, eine Gerade, “die” Zeichenebene?

137

a) Erklärt, was EUKLID unter einem *Punkt* und unter einer *geraden Linie* versteht. Formuliert mit eigenen Worten neu.

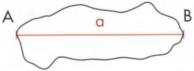
b) Schaut euch die Zeichnung rechts an. Theresa hat mit einem weichen Bleistift einen Punkt gezeichnet. Ihre Freundin Lisa meint, Theresa hätte einen Kreis gezeichnet. Was meint ihr dazu?

c) Was ist in den Definitionen 10 und 23 beschrieben? Findet Beispiele für solche Linien.

d) Vergleicht EUKLIDS Text mit den Grundbegriffen der Geometrie, die ihr in der folgenden Information kennen lernt.

[Kra1-39b]

Die Strecke



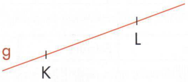
$\overline{AB} = 4$ cm
$a = 4$ cm

Eine **Strecke** ist die **kürzeste Verbindung** zwischen zwei Punkten.
AB … Strecke von A nach B

Die **Länge der Strecke** ist der **Abstand** der beiden Punkte A und B. Du kannst sie auf zwei Arten angeben:

- mit Anfangs- und Endpunkt: $\overline{AB}$
- mit Kleinbuchstaben: a

Die Gerade



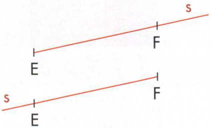
zB: g = g(KL) = g(L) = …

Verlängert man eine Strecke KL in beide Richtungen, so entsteht eine **Gerade**.

Sie hat **keinen Anfangs-** und **keinen Endpunkt**.

Man bezeichnet Geraden mit **Kleinbuchstaben**.
Zur genaueren Bezeichnung kannst du auch einen oder zwei Punkte angeben, die auf der Geraden liegen.

Die Halbgerade (der Strahl)



$s(EF) \neq s(FE)$

Verlängert man die Strecke EF nur in eine Richtung, so entsteht eine **Halbgerade** (auch **Strahl** genannt).

Die Halbgerade hat **einen Anfangspunkt**, aber **keinen Endpunkt**.

Halbgeraden bezeichnet man auch mit Kleinbuchstaben.

Wichtig: Der Anfangspunkt steht immer am Beginn!

Am Anfang steht der Punkt

„Punkt" und „Gerade" sind die Grundlagen der Geometrie. Jedoch ist es gar nicht so leicht zu erklären, was ein Punkt ist. Euklid, der vor 2 300 Jahren das erste geometrische Lehrbuch verfasste, schrieb: „Ein Punkt ist, was keine Teile hat." Aber damit ist wenig erklärt. Auf das Wesentliche nimmt Euklid nicht Bezug, dass man nämlich auf einen Punkt mit dem Ausruf „Hier!" zeigen kann. Und man meint mit dieser Markierung nicht irgendeine vage Stelle, sondern wirklich einen genau bestimmten Ort.

Wenn wir einen Punkt zeichnen, haben wir ihn selbst eigentlich gar nicht vor Augen, sondern wir fixieren ihn nur in unserer Vorstellung. Mit anderen Worten:
Ein Punkt ist kein kleiner Bleistiftfleck auf dem Papier, sondern eine gedankliche Konstruktion. Eigentlich wird Geometrie nicht nur auf dem Papier, sondern vor allem im Kopf betrieben, wie alles in der Mathematik. Die Zeichnung selbst dient nur als Werkzeug und Veranschaulichung des Denkens.

[Rei1-182]

Die Elemente. I. Buch.

Definitionen

1. Ein Punkt ist, was keine Teile hat.
2. Eine Linie ist eine breitenlose Länge.
3. Die Enden einer Linie sind Punkte. […]
4. Eine gerade Linie (Strecke) ist eine solche, die zu den Punkten auf ihr gleichmäßig liegt.
5. Eine Fläche ist, was nur Länge und Breite hat.
6. Die Enden einer Fläche sind Linien. […]
8. Ein ebener Winkel ist die Neigung zweier Linien in einer Ebene gegeneinander, die einander treffen, ohne einander gerade fortzusetzen. […]
10. Wenn eine gerade Linie, auf eine gerade Linie gestellt, einander gleiche Winkel bildet, dann ist jeder der beiden gleichen Winkel ein rechter; und die stehende gerade Linie heißt senkrecht zu (Lot auf) der, auf der sie steht.
11. Stumpf ist ein Winkel, wenn er größer als ein rechter ist.
12. Spitz, wenn er kleiner als ein rechter ist. […]
14. Eine Figur ist, was von einer oder mehreren Grenzen umfasst wird. […]
23. Parallel sind gerade Linien, die in derselben Ebene liegen und dabei, wenn man sie nach beiden Seiten ins Unendliche verlängert, auf keiner einander treffen.


Preclarissimus liber elementorum Euclidis perspicacissimi: in artem Geometrie incipit quam foelicissime:

[Kra1-39a]

Axiomatischer Zugang:

Definiere Mengen, die gewisse Bedingungen (= Axiome) erfüllen. Diese sollen eine "ebene Geometrie" bzw. schließlich die "Geometrie der Euklidischen Ebene" (= Zeichenebene) ergeben.

Definition (1)

a) Eine *(abstrakte) Geometrie* $(\mathcal{E}, \mathcal{G})$ besteht aus einer nichtleeren Menge $\mathcal{E}$, deren Elemente wir *Punkte* nennen, sowie einer nichtleeren Menge $\mathcal{G}$ von Teilmengen von $\mathcal{E}$, deren Elemente wir *Geraden* nennen.

b) Eine Geometrie $(\mathcal{E}, \mathcal{G})$ heißt eine *Inzidenzebene*, wenn folgende (Inzidenz-)Axiome erfüllt sind:

(I1) $\forall P, Q \in \mathcal{E}: \; P \neq Q \Rightarrow \exists! g \in \mathcal{G} : \{P, Q\} \subset g$
(I2) $\forall g \in \mathcal{G} : \#(g) \geq 2$
(I3) $\exists P, Q, R \in \mathcal{E} : \#\{P, Q, R\} = 3$ und $\forall g \in \mathcal{G} : \{P, Q, R\} \not\subset g$.

Satz (1)

Es sei $(\mathcal{E}, \mathcal{G})$ *eine Inzidenzebene. Dann gilt:*

a) $\forall g, h \in \mathcal{G} : g \neq h \Rightarrow \#(g \cap h) \leq 1$

b) $\forall P \in \mathcal{E}$*:* $\exists g \in \mathcal{G} : P \in g$

Definition (2)

Es sei $(\mathcal{E}, \mathcal{G})$ eine Geometrie.
a) Geraden $g, h \in \mathcal{G}$ heißen *zueinander parallel* $(g||h)$, wenn $g = h$ oder $g \cap h = \{\}$ gilt.

b) $(\mathcal{E}, \mathcal{G})$ heißt eine *affine Inzidenzebene*, wenn die Inzidenzaxiome (I1), (I2), (I3) sowie das folgende Parallelenaxiom (I4) erfüllt sind:

(I4) $\forall g \in \mathcal{G}, \forall P \in \mathcal{E} : \exists! h \in \mathcal{G} : P \in h$ und $g||h$.

Definition (2)

Es sei $(\mathcal{E}, \mathcal{G})$ eine Geometrie.

a) Geraden $g, h \in \mathcal{G}$ heißen *zueinander parallel* $(g||h)$, wenn $g = h$ oder $g \cap h = \{\}$ gilt.

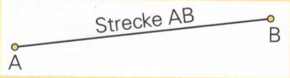
b) $(\mathcal{E}, \mathcal{G})$ heißt eine *affine Inzidenzebene*, wenn die Inzidenzaxiome (I1), (I2), (I3) sowie das folgende Parallelenaxiom (I4) erfüllt sind:

(I4) $\forall g \in \mathcal{G}, \forall P \in \mathcal{E} : \exists! h \in \mathcal{G} : P \in h$ und $g||h$.

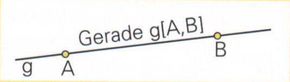
Satz (2)

Es sei $(\mathcal{E}, \mathcal{G})$ eine affine Inzidenzebene und $a, b, c \in \mathcal{G}$ drei paarweise verschiedene Geraden. Dann gilt:
Ist $a||b$ und $\#(a \cap c) = 1$, so folgt $\#(b \cap c) = 1$.

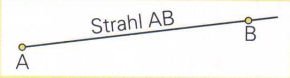
Weitere Begriffe: Strecke und Strahl (= Halbgerade)



(3) Eine geradlinige Verbindung zweier Punkte, z. B. die Kante eines Quaders oder Seite eines Rechtecks, heißt **Strecke**. Man bezeichnet eine Strecke mit AB, falls A und B die beiden Enden der Strecke sind.



(4) Verlängert man eine Strecke über beide Enden hinaus immer weiter, sodass es keinen Anfangspunkt und keinen Endpunkt gibt, dann heißt diese Linie **Gerade**. Geraden werden mit Kleinbuchstaben, wie g, h, m, bezeichnet. Geht eine Gerade g durch die Punkte A und B, schreibt man auch g[A,B].

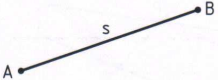


(5) Verlängert man eine Strecke AB über einen ihrer Endpunkte hinaus immer weiter, so nennt man diese Linie **Strahl**. Ein Strahl ist also nur auf einer Seite begrenzt.

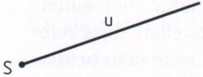
[Kra1-40]

Gerade Linien

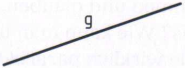
Punkte bezeichnet man mit Großbuchstaben (A, B, S, P, Q usw.), Linien mit Kleinbuchstaben (g, s, k, u usw.)



Eine **Strecke** ist eine **gerade Linie mit zwei Endpunkten.** Die Kanten eines Quaders sind zB Strecken.



Ein **Strahl** ist eine **gerade Linie mit einem Endpunkt.** Man kann auch vom **Anfangspunkt** des Strahls sprechen.



Eine **Gerade** ist eine **gerade Linie ohne Endpunkte.**

Bemerkung: Von einem **Strahl** und von einer **Geraden** kann man immer nur einen **Ausschnitt** zeichnen, denn jeder Strahl hat ja nur einen Endpunkt und jede Gerade gar keinen.

[Rei1-184]

Anordnungsaxiom

Definition (3)

Es sei $(\mathcal{E}, \mathcal{G})$ eine affine Inzidenzebene, und auf jeder Geraden $g \in \mathcal{G}$ sei eine Totalordnung $\preceq$ („liegt vor oder ist gleich") definiert. Für $P, Q \in g$ sei $P \prec Q \iff P \preceq Q$ und $P \neq Q$. („P liegt vor Q")

Weiters erfülle $(\mathcal{E}, \mathcal{G})$ das folgende *Anordnungsaxiom*:
(AO) $\forall g \in \mathcal{G}, \forall A, B \in g$ mit $A \prec B$ gilt: es existieren $P, Q, R \in g$ mit $P \prec A \prec Q \prec B \prec R$.

Für $g \in \mathcal{G}$ und $A, B \in g$ mit $A \prec B$ definieren wir

a) die *Strecke* $\overset{\vdash\!\dashv}{AB} = \{P \in g \mid A \preceq P \text{ und } P \preceq B\}$. A und B heißen die *Endpunkte* und g die *Trägergerade* der Strecke.

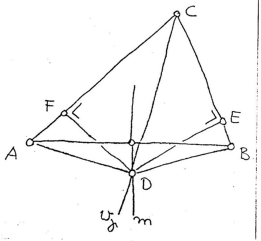
b) den *Strahl* $\overset{\mapsto}{AB} = \{P \in g \mid A \preceq P\}$. A heißt der *Endpunkt* und $+g$ die *Trägergerade* des Strahls.

Euklid hat umsonst gelebt!

Bekanntlich hat Euklid um 300 v. Chr. die griechische Mathematik zusammengefaßt in seinen "Elementen". Die Grundlage dieses Werks bildet die Theorie der kongruenten Dreiecke. Daß sich Euklid dabei hätte viele Mühe sparen können, zeigt folgender Satz:

Jedes Dreieck ist gleichseitig.

Zum Beweis betrachten wir ein Dreieck ABC (siehe Figur) und zeigen zuerst $\overline{BC} = \overline{CA}$. Entsprechend erhält man dann $\overline{AB} = \overline{BC}$ und damit die Gleichseitigkeit.



Es seien w_γ die Winkelhalbierende des Winkels γ bei C und m die Mittelsenkrechte auf $\overline{AB}$, ihr Schnittpunkt sei D. Ferner seien E und F die Fußpunkte der Lote von D auf BC bzw. CA. Dann gilt: Dreieck DEC ist kongruent zu DFC, denn sie stimmen überein in der Seite $\overline{DC}$, den Winkeln $\frac{\gamma}{2}$ (jeweils bei C) und den rechten Winkeln bei E bzw. F. Also ist insbesondere $\overline{CF} = \overline{CE}$ und $\overline{DF} = \overline{DE}$. Nun ist auch Dreieck DFA kongruent zu DEB, denn sie stimmen überein in den Seiten $\overline{DE}$ und $\overline{DF}$, weiter $\overline{DA}$ und $\overline{DB}$, weil D auf der Mittelsenkrechten m liegt und den rechten Winkeln bei E bzw. F. Also ist insbesondere $\overline{AF} = \overline{BE}$. Insgesamt hat man

$$\overline{AC} = \overline{AF} + \overline{FC} = \overline{BE} + \overline{EC} = \overline{BC} ,$$

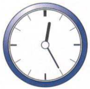
was wir zeigen mußten.

Wo ist der Fehler?

Der Winkelbegriff

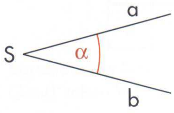
Der Winkel

Diese Bahnhofsuhr hat einen Stunden- und einen Minutenzeiger.
Die beiden Zeiger schließen einen Winkel ein.



Wenn sich der Minutenzeiger dreht, vergrößert sich der Winkel zwischen dem Stunden- und dem Minutenzeiger.

Definition und Bezeichnung



S ...... Scheitel
a, b ...Schenkel
α ...... Winkel

Ein **Winkel** ergibt sich durch **zwei Strahlen (Schenkel)**, die einen **gemeinsamen Anfangspunkt (Scheitel)** haben.

Winkel werden mit einem **Bogen** markiert und mit einem kleinen griechischen Buchstaben bezeichnet.
Schenkel benennt man immer mit Kleinbuchstaben.

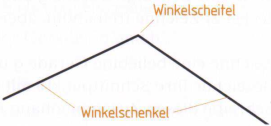
Die ersten fünf **griechischen Kleinbuchstaben** sind:

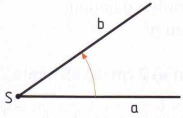
schreib:	α	β	γ	δ	ε
lies:	alpha	beta	gamma	delta	epsilon

[Box1-64]

Bezeichnungen

In nebenstehender Figur sind zwei Dachkanten idealisiert als **Strahlen** gezeichnet. Die Strahlen schließen einen Winkel ein, sie heißen **Schenkel** des Winkels. Ihr Schnittpunkt ist der **Scheitel** des Winkels.





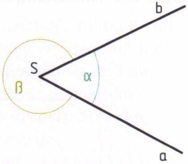
Man kann sich den Winkel in der nebenstehenden Figur auch so entstanden denken, dass der **Winkelschenkel b** (von **a** aus) ein Stück um den **Winkelscheitel S** gedreht wurde. Dadurch wird die **Größe des Winkels** bestimmt.

Bezeichnungen für Winkel

a) Winkel werden üblicherweise mit **griechischen Kleinbuchstaben** bezeichnet. Einige der gebräuchlichsten davon sind **α („alpha“), β („beta“), γ („gamma“), δ („delta“), ε („epsilon“)**, aber auch **φ („phi“), ψ („psi“)** oder **ω („omega“)** usw.

b) Man kann einen Winkel auch **mit Hilfe der beiden Strahlen** bezeichnen, die den Winkel einschließen. Der Winkel in nebenstehender Figur kann daher mit **∢ab** bezeichnet werden (**„Winkel zwischen a und b“**). Es gilt: $\alpha = \sphericalangle ab$

Zwei Strahlen schließen eigentlich stets **zwei verschiedene Winkel** ein.
Mit Hilfe eines **Winkelbogens** kann man eindeutig festlegen, ob man mit der Bezeichnung **∢ab** in der nebenstehenden Figur den kleinen Winkel **α** oder den großen Winkel **β** meint.

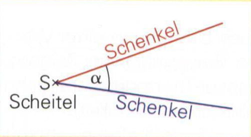


[Rei1-192]

Information

Verlängert man eine Strecke in eine Richtung, so erhält man einen Strahl.

Zwei Strahlen mit gleichem Anfangspunkt bezeichnet man als **Winkel**.
Die Strahlen, die den Winkel begrenzen, heißen **Schenkel** des Winkels.
Der gemeinsame Anfangspunkt der beiden Strahlen heißt **Scheitel** S des Winkels.



Winkel werden meist mit einem Winkelbogen und einem kleinen griechischen Buchstaben bezeichnet:
α (Alpha), β (Beta), γ (Gamma), δ (Delta), ε (Epsilon), φ (Phi), ρ (Rho)

[Kra1-123]

Ein möglicher axiomatischer Zugang

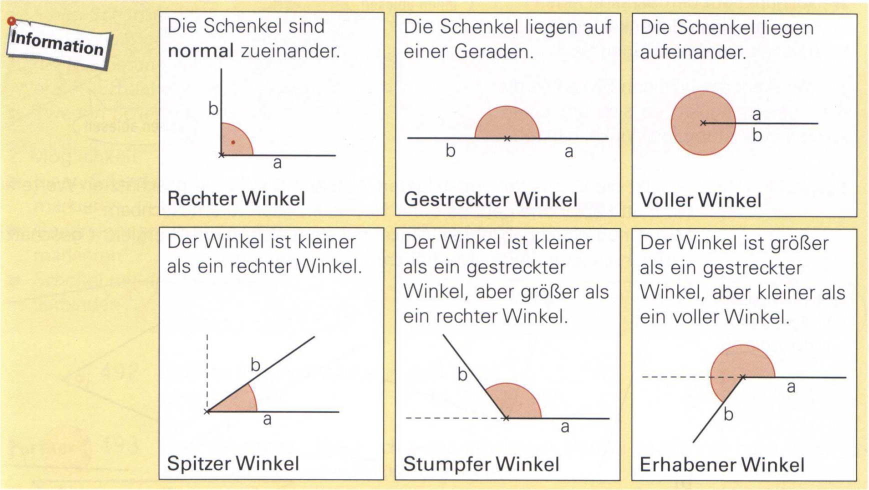
Es sei $(\mathcal{E}, \mathcal{G})$ eine Geometrie, in der nachfolgende Überlegungen möglich sind (z.B.: eine "Euklidische Geometrie").
Ein *Winkel* besteht aus zwei Strahlen $a, b \subset \mathcal{E}$, die denselben Anfangspunkt $P \in \mathcal{E}$ besitzen (in Zeichen: $\sphericalangle a, b$). g_a bzw. $g_b \in \mathcal{G}$ seien die Trägergeraden von a bzw. b.

Ist $g_a = g_b$ und $a = b$, so heißt $\sphericalangle a, b$ *Nullwinkel*.
Ist $g_a = g_b$ und $a \neq b$ (so folgt $a \cap b = \{P\}$ und $a \cup b = g_a$), so heißt $\sphericalangle a, b$ *gestreckter Winkel*.
Ist $g_a \neq g_b$, so heißt $\sphericalangle a, b$ *echter Winkel*.

Ist $\sphericalangle a, b$ ein echter Winkel, so teilt g_a die Ebene $\mathcal{E}$ in zwei (abgeschlossene) Halbebenen E_1^+, E_1^-, von denen genau eine den Strahl b enthält; dies sei die Halbebene E_1^+. Analog teilt g_b die Ebene $\mathcal{E}$ in zwei Halbebenen E_2^+ und E_2^- mit $a \subset E_2^+$.

Dann heißen $E_1^+ \cap E_2^+$ das *innere Winkelfeld* und $E_1^- \cup E_2^-$ das *äußere Winkelfeld* des Winkels $\sphericalangle a, b$.

Typen und Größen von Winkeln



[Kra1-125]

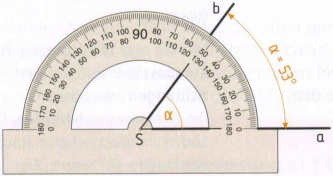
3.3 Messen und Zeichnen von Winkeln

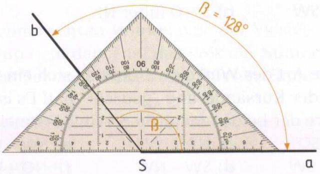
Hanna und Chris wollen die Größen ihrer Winkel messen. Hanna hat einen halbkreisförmigen Winkelmesser, Chris hat sein Geodreieck zur Verfügung.
Welche Vor- und Nachteile haben diese beiden Mess- und Zeichengeräte?

Messen von Winkeln

Der unten dargestellte halbkreisförmige **Winkelmesser** enthält eine **doppelte Einteilung**. Er zeigt die Unterteilung eines gestreckten Winkels sowohl im **Uhrzeigersinn** als auch im **Gegenuhrzeigersinn**.

Auch jedes Geodreieck enthält einen **Winkelmesser**. Die Figur zeigt, wie mit Hilfe eines Geodreiecks ein stumpfer Winkel gemessen werden kann.





Achte beim Messen eines Winkels besonders auf drei Dinge:

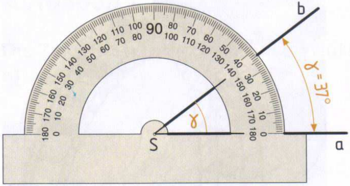
1. Der „Nullpunkt“ des Winkelmessers muss mit dem Scheitel des Winkels übereinstimmen.
2. Die Kante des Winkelmessers muss genau auf dem einen Winkelschenkel liegen.
3. Verwende beim Ablesen der Winkelgröße die „richtige“ Einteilung (auch Winkelskala genannt)! Überprüfe, ob die von dir **abgelesene Winkelgröße** mit der **Art des Winkels** (spitz oder stumpf) übereinstimmt!

[Rei1-196a]

Zeichnen von Winkeln gegebener Größe

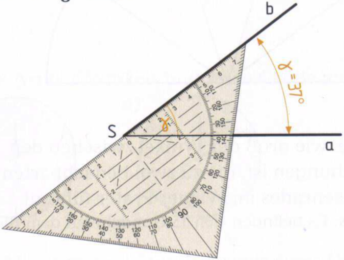
Es soll ein Winkel von 37° gezeichnet werden.

1. Möglichkeit



1. Zeichne zuerst den Scheitel S und den Schenkel a des Winkels!
2. Markiere mit Hilfe des Winkelmessers 37°!
3. Zeichne den Schenkel b als Verbindung der Markierung mit dem Scheitel S!

2. Möglichkeit



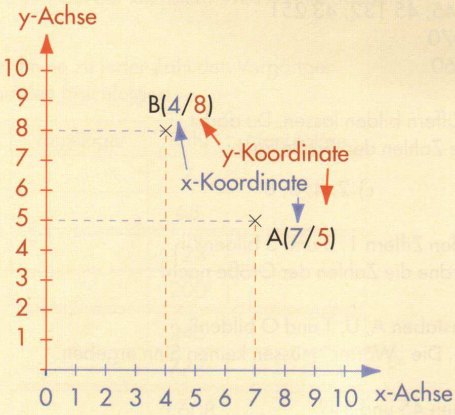
1. Zeichne zuerst den Scheitel S und den Schenkel a des Winkels!
2. Lege das Geodreieck so an, dass der Schenkel a durch die 37°-Markierung des Winkelmessers verläuft!
3. Zeichne den Schenkel b entlang der Zeichenkante des Geodreiecks!

Bemerkung: Genau genommen müssten wir zwischen dem **Winkel** und seiner **Größe** unterscheiden. So hat zB der Winkel γ die Größe von 37°. Aus dem Textzusammenhang ist aber stets erkennbar, ob mit dem Zeichen γ der Winkel selbst oder seine Größe gemeint ist. Wir schreiben daher: $\gamma = 37°$

[Rei1-196b]

Koordinatisierung der Euklidischen Ebene

Das Koordinatensystem



Wenn zwei Zahlenstrahlen senkrecht zueinander stehen, entsteht ein **rechtwinkliges Koordinatensystem**. Ein Zahlenstrahl heißt **x-Achse**, der andere **y-Achse**. Man kann damit Punkte in einer Ebene beschreiben. Jedem Punkt werden zwei Zahlen (ein Zahlenpaar) zugeordnet. Die erste Zahl heißt **x-Koordinate**, die zweite Zahl **y-Koordinate**.

Zum Punkt A gehört das Zahlenpaar (7/5). Man schreibt kurz A (7/5). Für den zweiten Punkt kann man B (4/8) schreiben.

[Box1-10]

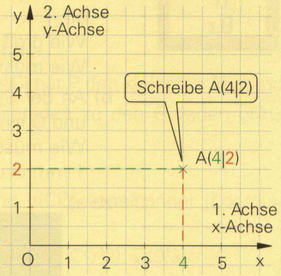
Information

Angabe von Punkten in einem Koordinatensystem

Wählt man in einem Quadratgitter einen festen Bezugspunkt O, einen Zahlenstrahl von O aus nach rechts und einen nach oben, so kann jeder Gitterpunkt durch zwei Zahlen beschrieben werden.

A (4|2) bedeutet: Gehe vom Punkt O aus 4 Einheiten nach rechts, dann 2 Einheiten nach oben. So gelangst du zum Punkt A.

Die Zahl 4 nennt man die **1. Koordinate** des Punktes A oder x-Koordinate, die Zahl 2 nennt man die **2. Koordinate** des Punktes A oder y-Koordinate.



! A (4|2) und B (2|4) sind verschiedene Punkte.

Beide Zahlenstrahlen (1. Achse und 2. Achse) zusammen bilden ein **Koordinatensystem**. Man bezeichnet die Achsen auch als x- bzw. y-Achse. O nennt man den **Ursprung** des Koordinatensystems.

[Kra2-125]

1. Zeichne das durch die Koordinaten der Eckpunkte A, B und C festgelegte Rechteck ABCD auf Millimeterpapier: A(0|0), B(3|3), C(1|5)!
Wähle für die Einheitsstrecke $\overline{01} = 1$ cm!

Welche Koordinaten hat der Punkt D des Rechtecks?

Beim Zeichnen wirst du bemerken, dass wir hier mit dem bisher bekannten **Koordinatensystem** nicht auskommen. Um auch Punkte festlegen zu können, die „außerhalb“ dieses Koordinatensystems liegen, verlängert man die **Koordinatenachsen** nach links bzw. nach unten über den **Ursprung 0** hinaus (→ Fig. 100).

Die Einheiten auf der nach links verlängerten **1. Koordinatenachse (x-Achse)** und auf der nach unten verlängerten **2. Koordinatenachse (y-Achse)** werden mit negativen Zahlen angegeben.

Der Punkt D des Rechtecks in Fig. 100 hat die Koordinaten **(−2|+2)**.

Bemerkung: Bei positiven Koordinatenangaben kann das Vorzeichen „+“ weggelassen werden.
Z. B.: D(−2|+2) = D(−2|2)

Wo liegt in Fig. 100 der Punkt P(−2|−1)?
Zeichne ihn ein!

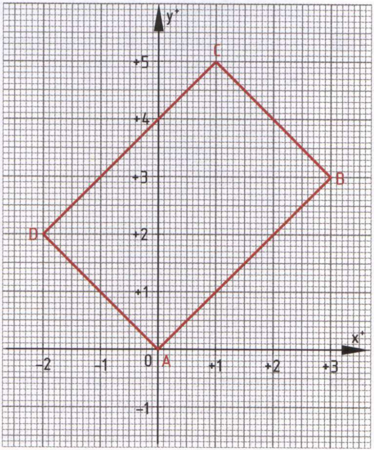


Fig. 100

[Rei3-167]

Koordinatisierung der Euklidischen Ebene:

Um in einer Euklidischen Ebene $(\mathcal{E}, \mathcal{G})$ ein (orthonormales) Koordinatensystem einzuführen, benötigt man:

1. Einen Punkt $O \in \mathcal{E}$ (den "Koordinatenursprung")

2. Zwei Geraden $g_1, g_2 \in \mathcal{G}$ mit $g_1 \cap g_2 = \{O\}$, die senkrecht (= normal) aufeinander stehen (die "Koordinatenachsen")

3. Punkte $E_i \in g_i \setminus \{O\}$ mit $l(\overset{\longmapsto}{OE_1}) = l(\overset{\longmapsto}{OE_2})$ (die "Einheitspunkte" auf den Koordinantenachsen)

Dazu müssen die grünen Begriffe definiert (bzw. deren Existenz gesichert) sein; $l(\overset{\longmapsto}{AB})$ bedeutet die Länge der Strecke $\overset{\longmapsto}{AB}$.
Weiters gibt es 2 mögliche Orientierungen des Koordinatensystems.