Symmetrische Funktionen, HS 2009

Karin Baur

November 2009

Inhaltsverzeichnis

1. **Woche**

1 Einleitung

1.1 Der Begriff der symmetrischen Polynome

Sei $\Lambda(n) := \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$ der Ring der Polynome in n unabhängigen Variablen über $\mathbb{Z}$ (mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}$). *In Kapitel 3 wird kurz erklärt, was ein Ring ist.* Mit S_n bezeichnen wir die symmetrische Gruppe in n Erzeugenden. Das ist die Gruppe der Permutationen von n Elementen. Sie kann dargestellt werden als die Gruppe der $n \times n$-Matrizen mit einem einzigen Eintrag 1 pro Zeile und pro Spalte und überall 0 sonst. *Der Begriff der Gruppe und die symmetrische Gruppe S_n werden in Abschnitt 2.6 kurz eingeführt.*

Die Gruppe S_n operiert auf $\Lambda(n)$ durch Vertauschung der Variablen x_i: ist f ein Polynom aus $\Lambda(n)$ und $\sigma \in S_n$ eine Permutation, so ist f^σ (oder $f \circ \sigma$) das Polynom mit $f^\sigma(x_1, \ldots, x_n) = f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$.

Definition. Ein Polynom f in $\Lambda(n)$ heisst *symmetrisch*, falls es invariant ist unter dieser Operation.

Die *symmetrischen Polynome in n Variablen*, Λ_n, sind nun definiert als die Elemente von $\Lambda(n)$, die invariant sind unter Vertauschen der Variablen:

$$\Lambda_n := \Lambda(n)^{S_n} = \{f \in \Lambda(n) \mid f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) = f(x_1, \ldots, x_n)\}\,.$$

Beispiel 1. a) Im Fall $n = 2$ ist $\Lambda(2) = \mathbb{Z}[x, y]$ einfach der Ring der Polynome in zwei Variablen. Die symmetrische Gruppe S_2 permutiert die Variablen x und y. Elemente von Λ_2 sind z.B.

$$x + y,\ x^2 + y^2,\ x^3 + y^3,\ \text{aber auch } x^2 + xy + y^2\,,\ \text{etc.}$$

b) Ist $n = 3$, $\Lambda(3) = \mathbb{Z}[x, y, z]$, so sind $x + y + z$, $x^2 + y^2 + z^2$ etc. Elemente von $\Lambda_3 := \Lambda^{S_3}$.

Unter den symmetrischen Polynomen gibt es die *elementar-symmetrischen Funktionen.* Die r-te elementar-symmetrische Funktion e_r ist die Summe aller Produkte in r verschiedenen Variablen x_i:

$$\begin{aligned} e_0 &= 1 \\ e_r &= \sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_r} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_r} \end{aligned}$$

Übung 1. Die e_r sind algebraisch unabhängig. (Dazu mehr später).

Bemerkung. Im Beispiel 1 sind das bei a) $e_1 = x + y$, $e_2 = xy$ und $e_r = 0$ für $r > 2$ und bei b) $e_1 = x + y + z$, $e_2 = xy + xy + yz$, $e_3 = xyz$ und $e_r = 0$ für $r > 3$.

Symmetrische Funktionen: wir werden später beliebig viele Variablen zulassen.

Die Vorlesung richtet sich nach dem ersten Kapitel vom Buch [M98] von Ian Macdonald.

2 Partitionen

Viele Objekte in der Mathematik werden durch Partitionen parametrisiert, insbesondere Objekte dieser Vorlesung. In diesem Abschnitt werden die Grundbegriffe im Zusammenhang mit Partitionen eingeführt, die nachher benutzt werden. Ausserdem werden einige Resultate über Ordnungen von Partitionen vorgestellt.

2.1 Partitionen

Eine *Partition* ist eine (möglicherweise unendliche) Folge

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r, \dots)$$

von nicht negativen ganzen Zahlen in fallender Ordnung, i.e.

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r \geq \dots ,$$

die nur endlich viele Einträge verschieden von Null enthält (also $\sum \lambda_i < \infty$). Wir werden keinen Unterschied zwischen Partitionen machen, die sich nur durch eine Folge von Nullen am Ende unterscheiden, z.B. sind für uns $(2,1)$, $(2,1,0)$ und $(2,1,0,0,\dots)$ alles dieselbe Partition.

Definition. Sei λ eine Partition. Die $\lambda_i \neq 0$ heissen die *Teile von* λ, die Anzahl der Teile von λ sind die *Länge von* λ, abgekürzt $l(\lambda)$. Die Summe $|\lambda| = \sum_i \lambda_i$ der Teile von λ ist das *Gewicht von* λ.

Definition. Ist $|\lambda| = n$, so ist λ eine *Partition von* n. Die Menge der Partitionen von n wird als $\mathcal{P}_n$ geschrieben und $\mathcal{P}$ ist die Menge aller Partitionen. (Insbesondere hat $\mathcal{P}_0$ genau ein Element, geschrieben 0, die einzige Partition von 0.)

Als Schreibweise für Partitionen wird oft

$$\lambda = (1^{m_1} 2^{m_2} \dots r^{m_r} \dots),$$

(und auch ohne die i mit $m_i = 0$) benutzt, wobei m_i die Anzahl der Teile ist, die gleich i sind:

$$m_i = m_i(\lambda) = |\{j \mid \lambda_j = i\}| \tag{2.1.1}$$

heisst die *Vielfachheit von* i *in* λ.

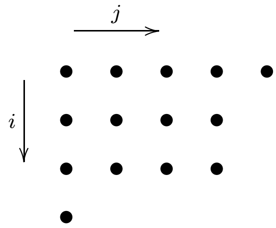
Auch werden wir zur Abkürzung die wiederholten Teile anstatt auszuschreiben mittels der Vielfachheit schreiben (und bei der fallenden Ordnung bleiben). Zusätzlich lässt man die Kommas weg, wenn keine Unklarheiten enstehen. Also wird zum Beispiel für $\lambda = (5,4,4,1)$ einfach (5441) oder (54^21) geschrieben.

2.2 Diagramme

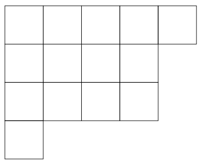
Das *Diagramm einer Partition* $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ sind die Punkte $(i, j) \in \mathbb{Z}^2$ mit $1 \le j \le \lambda_i$. Dabei ist es Konvention, dass die erste Koordinate, i (der Zeilenindex), nach unten ansteigt. Und dass die zweite Koordinate, j (der Spaltenindex), nach rechts ansteigt.

(In der sogenannten "französische Konvention" wächst i nach oben, wie beim üblichen Koordinatensystem).

Als Beispiel sei $\lambda = (5441)$ eine Partition von 14

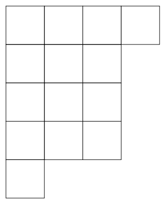


Wir werden Diagramme von Partitionen meistens mit Quadraten (anstatt $\bullet$) aufschreiben:

$\lambda = (54^2 1)$:


Man schreibt auch λ für das Diagramm der Partition λ.

Definition. Die *zu λ konjugierte Partition* λ' ist gerade die Partition λ', deren Diagramm das transponierte von λ ist (d.h. das Diagramm, das man erhält, indem man λ an der Hauptdiagonalen $i = j$ spiegelt).

$\lambda' = (43^3 1)$:


λ'_i ist also die Anzahl der Quadrate in der i-ten Spalte von λ. Anders gesagt:

$$\lambda'_i = |\{j \mid \lambda_j \ge i\}\,. \tag{2.2.1}$$

Insbesondere ist $\lambda'_1 = l(\lambda)$ und $\lambda_1 = l(\lambda')$. Es gilt $(\lambda')' = \lambda$.

Aus (2.1.1) und (2.2.1) erhält man sofort

$$m_i = \lambda'_i - \lambda'_{i+1}\,.$$

2. Woche

Zur Partition λ sei nun

$$n(\lambda) := \sum_{i\geq 1}(i-1)\lambda_i\,. \tag{2.2.2}$$

D.h. $n(\lambda)$ ist die Summe, die man aus dem Diagramm von λ erhält, indem man die Quadrate der ersten Zeile 0 mal zählt, die Quadrate der zweiten Zeile einmal, die Quadrate der dritten Zeile zweimal zählt und das alles aufsummiert.

Zählt man die Anzahl Quadrate für jede Spalte zusammen, ergibt sich

$$n(\lambda) = \sum_{i\geq 1}\binom{\lambda_i'}{2} \tag{2.2.3}$$

(Spalte i: $0+1+2+\cdots+\lambda_i'-1 = \binom{\lambda_i'}{2}$).

Für $\lambda = (5441)$ ist $n(\lambda) = 0+1\cdot 4+2\cdot 4+3\cdot 1 = 15$, das ist $= \binom{4}{2}+3\binom{3}{2}+\binom{1}{2} = \sum_{i\geq 1}\binom{\lambda_i'}{2}$.

Notation. Eine weitere nützliche Schreibweise für Partitionen ist die folgende (die auf Frobenius zurückgeht): Sei r die Anzahl der Quadrate auf der Hauptdiagonalen (i.e. r ist die Anzahl der (i,i) im Diagramm von λ).

Für $1 \leq i \leq r$ definiert man

$$\begin{aligned} \alpha_i := \lambda_i - i &= |\{\text{Quadrate in } i\text{-ter Zeile von } \lambda, \text{ die rechts von } (i,i) \text{ liegen}\}| \\ \beta_i := \lambda_i' - i &= |\{\text{Quadrate in } i\text{-ter Spalte von } \lambda, \text{ die unterhalb von } (i,i) \text{ liegen}\}| \end{aligned}$$

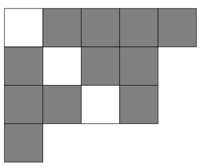
Es ist dann $\alpha_1 > \alpha_2 > \cdots > \alpha_r \geq 0$ und $\beta_1 > \beta_2 > \cdots > \beta_r \geq 0$.

Man schreibt

$$\lambda = (\alpha_1,\ldots,\alpha_r \mid \beta_1,\ldots,\beta_r) = (\alpha \mid \beta)$$

Die zu $(\alpha \mid \beta)$ konjugierte Partition ist einfach $(\beta \mid \alpha)$.

Beispiel. Ist $\lambda = (5441)$, so ist (mit $r=3$) $\alpha = (421)$ und $\beta = (310)$, also $\lambda = (421 \mid 310)$.

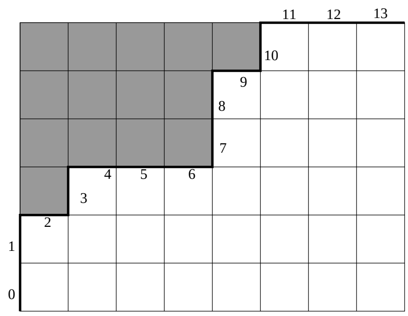


Lemma 2.1. *Sei λ eine Partition und seien n, m Zahlen mit $n \geq l(\lambda)$, $m \geq l(\lambda')$. Dann bilden die $n+m$ Zahlen*

$$\begin{cases} \lambda_i + n - i & (1 \leq i \leq n) \\ n-1+j-\lambda_j' & (1 \leq j \leq m) \end{cases}$$

eine Permutation von $\{0,1,2,\ldots,m+n-1\}$.

Beweis. Weil $l(\lambda) \leq n$ ist und $l(\lambda') \leq m$, so liegt das Diagramm von λ im Diagramm der Partition (m^n), welches ein Rechteck mit n Zeilen und m Spalten ist. Nun nummeriert man die Segmente der Grenzlinie zwischen λ und seinem Komplement in (m^n) mit den Zahlen $0, 1, 2, \ldots, m+n-1$, wobei man unten links anfängt. Im Bild sind diese Segmente dicker angemalt (im Bild ist $n = 6$ und $m = 8$; $\lambda = (54^21)$ und $\lambda' = (43^31)$).



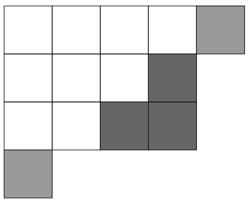
Die Zahlen, die zu den vertikalen Segmenten geschrieben werden sind $\lambda_i + n - i$ $(1 \leq i \leq n)$. Analog sind (mit Transposition) die Zahlen, die zu den horizontalen Segmenten geschrieben werden $(m+n-1) - (\lambda'_j + m - j) = n - 1 + j - \lambda'_j$ $(1 \leq j \leq m)$. □

2.3 Schief-Diagramme und Tableaux

Sind λ und μ Partitionen, so schreiben wir $\lambda \supset \mu$, falls das Diagramm von λ das Diagramm von μ enthält, i.e. falls $\lambda_i \geq \mu_i$ ist für alle $i \geq 1$.

Definition. Sei $\lambda \supset \mu$. Die (mengen-theoretische) Differenz $\theta := \lambda - \mu$ heisst *Schiefdiagramm.*

Für $\lambda = (5441)$ und $\mu = (432)$ besteht das Schiefdiagramm $\lambda - \mu$ aus den grauen Quadraten im Bild:



Definition. Sei θ ein Schiefdiagramm. Ein *Pfad in* θ ist eine Folge von Quadraten $x_0, x_1, \ldots, x_m$ in θ, so dass x_{i-1} und x_i eine gemeinsame Seite haben $(i = 1, \ldots, m)$. Eine Teilmenge φ von θ heisst *zusammenhängend*, falls je zwei Quadrate von φ durch einen Pfad in φ verbunden werden können. Die maximalen zusammenängenden Teilmengen von θ sind selbst Schiefdiagramme. Sie werden die *Zusammenhangskomponenten von* θ genannt.

Im obigen Beispiel hat $\theta = \lambda - \mu$ drei Zusammenhangskomponenten.
(Bemerkung: ist $\lambda \supset \mu$, so ist natürlich auch $\lambda' \supset \mu'$).

Definition. Das zu $\theta = \lambda - \mu$ *konjugierte Schiefdiagramm* ist $\theta' = \lambda' - \mu'$.

Sei $\theta_i := \lambda_i - \mu_i$, $\theta'_i := \lambda'_i - \mu'_i$ und

$$|\theta| = \sum \theta_i = |\lambda| - |\mu|$$

das *Gewicht von* θ.

Definition. Ein Schiefdiagramm heisst ein *horizontaler* m*-Streifen* (bzw. ein *vertikaler* m*-Streifen*), falls $|\theta| = m$ ist und $\theta'_i \leq 1$ gilt (bzw. $\theta_i \leq 1$) für jedes $i \geq 1$.

Ein horizontaler (vertikaler) Streifen hat also höchstens ein Quadrat in jeder Spalte (Zeile).

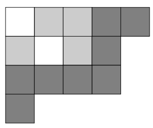
Bemerkung. Sei $\theta = \lambda - \mu$, so ist θ ein horizontaler Streifen genau dann, wenn λ und μ "interlaced" sind, d.h. wenn gilt $\lambda_1 \geq \mu_1 \geq \lambda_2 \geq \mu_2 \geq \dots$.

Definition. Ein Schiefdiagramm θ ist ein *Randstreifen*[1], falls θ zusammenhängend ist und keine 2×2 Blöcke von Quadraten enthält, so dass also benachbarte Zeilen (oder Spalten) von θ genau ein gemeinsames Quadrat haben. Die *Länge* eines Randstreifens θ ist die Anzahl Quadrate, die θ enthält. Die *Höhe* von θ ist eins weniger als die Anzahl Zeilen, die benutzt werden.

Wenn man sich einen Randstreifen vorstellt als eine Menge von Punkten (den Mittelpunkten) anstatt von Quadraten, und diese mit horizontalen bzw. vertikalen Geraden-Segmenten verbindet, so erhält man eine Art von Treppe. Die Höhe ist dann die Anzahl der vertikalen Segmente in dieser Treppe.

Ist $\lambda = (\alpha_1, \dots, \alpha_r \mid \beta_1, \dots, \beta_r)$ und $\mu = (\alpha_2, \dots, \alpha_r \mid \beta_2, \dots, \beta_r)$, so ist $\lambda - \mu$ ein Randstreifen, genannt der *Rand* von λ.

Beispiel. Der Rand $\lambda - \mu$ von $(54^21) = (421 \mid 310)$, wobei $\mu = (21 \mid 10)$ ist:



Definition. Ein (spalten-striktes) *Tableau* T ist eine Folge von Partitionen

$$\mu = \lambda^{(0)} \subset \lambda^{(1)} \subset \dots \subset \lambda^{(r)} = \lambda\,,$$

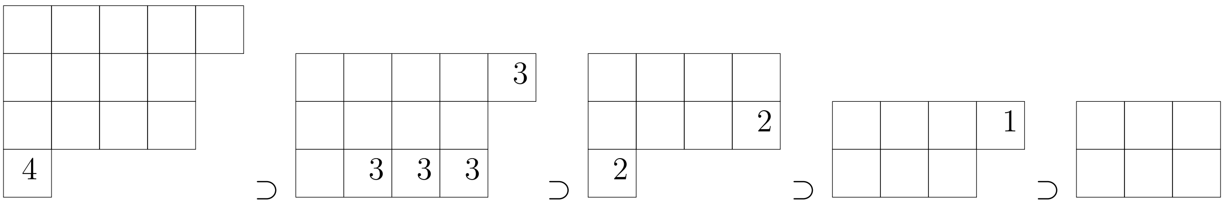
so dass jedes Schiefdiagramm $\theta^{(i)} := \lambda^{(i)} - \lambda^{(i-1)}$ (für $1 \leq i \leq r$) ein horizontaler Streifen ist.

[1] oder ribbon - Band

3. Woche

Bildlich kann man T beschreiben, indem man jedes Quadrat des Schiefdiagramms $\theta^{(i)}$ mit der Zahl i beschriftet, $1 \leq i \leq r$. Damit jedes Schiefdiagramm in der Folge ein horizontaler Streifen ist, müssen diese Zahlen in jeder Spalte streng monoton von oben nach unten ansteigen (daher "spalten-strikt"). Und in jeder Zeile steigen sie monoton an von links nach rechts.

Beispiel. Ein Beispiel eines Tableau mit $\lambda = (54^2 1)$ und $\mu = (3,3)$, i.e. $\lambda - \mu$ ist gerade der Rand von λ.



Übung 2. Zu Beispiel 2.3 zwei Fragen: was ist die Füllung von $\lambda - \mu$ und wie sehen die Schiefdiagramme $\theta^{(1)}, \ldots, \theta^{(4)}$ aus?

Oft werden wir in diesem Sinn ein Tableau als einem mit Zahlen gefülltes Schief-Diagramm auffassen, man sagt dem eine *Füllung* des Schiefdiagramms. Das Schiefdiagramm $\lambda - \mu$ heisst die *Gestalt von T*, die Folge $(\theta^{(1)}, \theta^{(2)}, \ldots, \theta^{(r)})$ das *Gewicht von T*.

(Man könnte analog auch zeilen-strikte Tableaux definieren, solche Tableaux benötigen wir jedoch nicht). Im Text wird ein Tableau immer ein spalten-striktes Tableau sein.

Definition. Ein *Standard-Tableau* ist ein Tableau T, das die Zahlen $1, 2, \ldots, r$ je genau einmal enthält.

Das Gewicht eines Standard-Tableaus ist also $(1, 1, \ldots, 1)$.

Übung 3. Zwei weitere Beispiel von Tableaux von $\lambda - \mu$ sind hier:

			1	1
			2	
1	1	1	3	
2				

			1	3
			2	
4	5	7	8	
6				

1) Wie sieht in den beiden Fällen die entsprechende Folge der $\theta^{(i)}$ aus?
2) Ist ein Standard-Tableau zu $\lambda - \mu$ eindeutig?

2.4 Addition und Multiplikation von Partitionen

Hier beschreiben wir einige Operationen auf der Menge der Partitionen. Seien λ, μ Partitionen.

(i) $\lambda + \mu$ ist definiert als die Summe der Folgen λ und μ:

$$(\lambda + \mu)_i = \lambda_i + \mu_i$$

Z.B. ist $(321) + (22) = (541)$.

(ii) $\lambda \cup \mu$ ist definiert als die Partition deren Teile die Vereinigung aller Teile von λ und μ ist, in absteigender Ordnung. Also zum Beispiel ist

$$(321) \cup (22) = (32221)$$

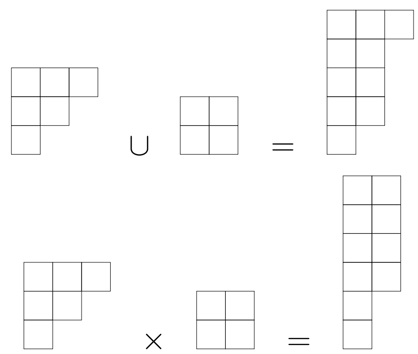
(iii) $\lambda\mu$ ist das komponentenweise Produkt der Folgen λ und μ:

$$(\lambda\mu)_i = \lambda_i \mu_i$$

Also zum Beispiel $(321)(22) = (640) = (64)$.

(iv) $\lambda \times \mu$ ist die Partition, deren Teile jeweils das Minimum $\min(\lambda_i, \mu_j)$ sind (für alle $i \leq l(\lambda)$, $j \leq l(\mu)$, in absteigender Ordnung, z.B.

$$(321) \times (22) = (222211)$$



Übung 4. Berechne $\lambda + \mu$, $\lambda \cup \mu$, $\lambda\mu$ und $\lambda \times \mu$, ebenso wie $\lambda' + \mu'$ und $\lambda'\mu'$ für $\lambda = (321)$ und $\mu = (211)$.

Vergleiche die Resultate mit Lemma 2.2 unten. Was sind die Gewichte der Resultate?

Die Operationen $+$ und $\cup$ sind dual zueinander, ebenso wie die beiden Multiplikationen:

Lemma 2.2. *Es gilt*

$$\begin{aligned}(\lambda \cup \mu)' &= \lambda' + \mu' \\ (\lambda \times \mu)' &= \lambda'\mu'\end{aligned}$$

Beweis. Das Diagramm von $\lambda \cup \mu$ erhält man, indem man die Zeilen der Diagramme von λ und von μ nimmt und sie absteigend ordnet. Damit ist die Länge der k-ten Spalte von $\lambda \cup \mu$ die Summe der Längen der k-ten Spalten von λ und von μ, d.h. $(\lambda \cup \mu)'_k = \lambda'_k + \mu'_k$.

Die Länge der k-ten Spalte von $\lambda \times \mu$ ist gerade die Anzahl der Paare (i, j) mit $\lambda_i \geq k$ und $\mu_j \geq k$, also gleich gleich $\lambda'_k \mu'_k$. Daher ist $(\lambda \times \mu)'_k = \lambda'_k \mu'_k$. □

2.5 Ordnungen

Hier führen wir drei Ordnungen auf der Menge der Partitionen ein.

Definition. Die *umgekehrt lexikographische Ordnung* L_n auf den Partitionen $\mathcal{P}_n$ von n ist gegeben als die Teilmenge $L_n \subset \mathcal{P}_n \times \mathcal{P}_n$ der Paare (λ, μ), für die gilt $\lambda = \mu$ oder dass die erste nicht-verschwindende Differenz $\lambda_i - \mu_i$ positiv ist.

Diese Ordnung ist eine Totalordnung (d.h. je zwei Partitionen von n können immer unter L_n geordnet werden). Anstatt $(\lambda, \mu) \in L_n$ kann man auch $\lambda \geq_{L_n} \mu$ schreiben.

Beispiel. Für $n = 5$ ordnet L_5 die Menge $\mathcal{P}_5$ wie folgt:

$$(5), (41), (32), (31^2), (2^2 1), (21^3), (1^5)\,.$$

Das bedeutet, dass (λ, μ) genau dann unter L_5 geordnet sind, wenn entweder $\lambda = \mu$ ist oder λ in dieser Liste links von μ auftaucht.

Eine andere Totalordnung auf $\mathcal{P}_n$ ist die Ordnung L'_n, die Menge aller (λ, μ), für die entweder $\lambda = \mu$ ist oder die erste nicht-verschwindende Differenz $\lambda^*_i - \mu^*_i$ *negativ* ist, mit $\lambda^*_i := \lambda_{n+1-i}$. Die Ordnungen L_n und L'_n sind ab $n \geq 6$ verschieden. Ist z.B. $\lambda = (31^3)$ und $\mu = (2^3)$, so gilt $(\lambda, \mu) \in L_6$ und $(\mu, \lambda) \in L'_6$[2].

Lemma 2.3. *Seien λ, $\mu \in \mathcal{P}_n$. Dann gilt*

$$(\lambda, \mu) \in L'_n \Longleftrightarrow (\mu', \lambda') \in L_n\,.$$

Beweis. Sei zuerst $(\lambda, \mu) \in L'_n$ und $\lambda \neq \mu$. Dann gibt es ein $i \geq 1$, so dass $\lambda_i < \mu_i$ gilt und $\lambda_j = \mu_j$ für $j > i$. Setzt man $k := \lambda_i$ und betrachtet die Diagramme von λ und μ, so sieht man, dass $\lambda'_j = \mu'_j$ gilt für $1 \leq j \leq k$ und $\lambda'_{k+1} < \mu'_{k+1}$. Also ist (μ', λ') in L_n. Die andere Richtung zeigt man ähnlich. □

Die nächste Ordnung ist wichtiger als die beiden Ordnungen L_n und L'_n.

[2] man kann auch die Notation $\mu \geq_{L'_6} \lambda$ verwenden

Definition. Die *natürliche (Teil-) Ordnung* N_n auf $\mathcal{P}_n$ ist folgendermassen definiert:

$$(\lambda, \mu) \in N_n \iff \lambda_1 + \cdots + \lambda_i \geq \mu_1 + \cdots + \mu_i \text{ für alle } i.$$

Diese wird auch *Dominanz* (Teil-) Ordnung genannt. Warum Teilordnung? Sobald $n \geq 6$ ist, ist N_n keine Totalordnung mehr, d.h. es existieren Partitionen λ und μ, die nicht vergleichbar sind unter N_n: Bei $n = 6$ betrachte man dazu (31^3) und (2^3). Man schreibt $\lambda \geq \mu$ anstatt $(\lambda, \mu) \in N_n$.

Notation. Gilt $\lambda \geq \mu$, so zeichnet man auch oft λ und μ in einem Diagramm, λ oberhalb von μ, mit einem Strich runter zu μ, um anzuzeigen, dass $(\lambda, \mu) \in N_n$ ist. Das ist ab $n = 6$ hilfreich, wenn N_n nicht mehr eine Totalordnung ist. Ein solches Diagramm heisst *Hasse Diagramm*.

Beispiel. Zum Vergleich hier die natürliche Ordnung N_n für $n = 5$ und $n = 6$.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
(5) \arrow[d, no head] \\
(41) \arrow[d, no head] \\
(32) \arrow[d, no head] \\
(31^2) \arrow[d, no head] \\
(2^21) \arrow[d, no head] \\
(21^3) \arrow[d, no head] \\
(1^5)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & (6) \arrow[d, no head] & \\
 & (51) \arrow[d, no head] & \\
 & (42) \arrow[dl, no head] \arrow[dr, no head] & \\
(41^2) \arrow[dr, no head] & & (33) \arrow[dl, no head] \\
 & (321) \arrow[dl, no head] \arrow[dr, no head] & \\
(31^3) \arrow[dr, no head] & & (2^3) \arrow[dl, no head] \\
 & (2^21^2) \arrow[d, no head] & \\
 & (21^4) \arrow[d, no head] & \\
 & (1^6) &
\end{tikzcd}$$

Übung 5. Man schreibe das Hasse Diagramm zur Ordnung N_n auf für $n = 7$. Am besten findet man zuerst eine Liste aller Partitionen von 7 und ordnet sie nachher nach $\geq$ (der natürlichen Teil-Ordnung).

Lemma 2.4. *Seien λ und μ Partitionen von n. Dann gilt*

$$\lambda \geq \mu \implies (\lambda, \mu) \in L_n \cap L'_n \, .$$

Beweis. Seien $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ und $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots)$ Partitionen von n. Ist $\lambda \geq \mu$, so gilt entweder $\lambda_1 > \mu_1$, und somit $(\lambda, \mu) \in L_n$, oder $\lambda_1 = \mu_1$. Im letzteren Fall ist dann entweder $\lambda_2 > \mu_2$ und $(\lambda, \mu) \in L_n$ oder $\lambda_2 = \mu_2$. So geht es weiter, und man sieht, dass

$(\lambda, \mu) \in L_n$ gilt.

Zur Behauptung $(\lambda, \mu) \in L'_n$ (es ist zu zeigen, dass ein $i \geq 1$ existiert, so dass $\lambda_n + 1 - j = \mu_n + 1 - j$ ist für $j < i$ und $\lambda_{n+1-i} < \mu_{n+1-i}$):
Für jedes $i \geq 1$ ist

$$\begin{aligned} \lambda_{i+1} + \lambda_{i+2} + \dots &= n - (\lambda_1 + \dots + \lambda_i) \\ &\leq n - (\mu_1 + \dots + \mu_i) \\ &= \mu_{i+1} + \mu_{i+2} + \dots \end{aligned}$$

(dabei gilt die Ungleichung wegen $\lambda \geq \mu$). Dann ergibt das gleiche Argument wie oben $(\lambda, \mu) \in L'_n$. □

Bemerkung. Die Umkehrung von Lemma 2.4 gilt im allgemeinen nicht, d.h. es gibt λ, μ in $\mathcal{P}_n$, mit $(\lambda, \mu) \in L_n \cap L'_n$ und $(\lambda, \mu) \notin P_n$. Als Beispiel: man betrachte $n = 12$, $\lambda = (63^2)$, $\mu = (5^2 1^2)$ (selber durchmachen!).

4. Woche (zuerst Beweis von Lemma 2.4)

Lemma 2.5. *Seien λ, $\mu \in \mathcal{P}_n$. Dann ist*

$$\lambda \geq \mu \Longleftrightarrow \mu' \geq \lambda' .$$

Beweis. Es reicht, die eine Richtung zu zeigen (die andere folgt mittels Konjugieren der Partitionen). Wir zeigen $\Longrightarrow$ (mittels Widerspruch).
Wir nehmen an, dass $\mu' \not\geq \lambda'$ gilt. Dann existiert ein $i \geq 1$, so dass

$$\lambda'_1 + \dots + \lambda'_j \leq \mu'_1 + \dots + \mu'_j \quad \text{(für jedes } 1 \leq j \leq i-1\text{)}$$

und

$$\lambda'_1 + \dots + \lambda'_i > \mu'_1 + \dots + \mu'_i \tag{2.5.1}$$

ist. Damit ist insbesondere $\lambda'_i > \mu'_i$. Seien $l := \lambda'_i$, $m := \mu'_i$. Aus (2.5.1) folgt nun (da $\sum_l \lambda'_l = \sum_l \mu'_l = n$)

$$\lambda'_{i+1} + \lambda'_{i+2} + \dots \quad < \mu'_{i+1} + \mu'_{i+2} + \dots \quad . \tag{2.5.2}$$

Nun ist $\lambda'_{i+1} + \lambda'_{i+2} + \dots$ gleich der Anzahl Quadrate im Diagramm von λ, die rechts der i-ten Spalte liegen und daher ist

$$\lambda'_{i+1} + \lambda'_{i+2} + \dots = \sum_{j=1}^{l} (\lambda_j - i) .$$

Analog ist

$$\mu'_{i+1} + \mu'_{i+2} + \dots = \sum_{j=1}^{m} (\mu_j - i) .$$

Daher erhält man aus (2.5.2) folgendes

$$\sum_{j=1}^{m}(\mu_j - 1) > \sum_{j=1}^{l}(\lambda_j - i) \geq \sum_{j=1}^{m}(\lambda_j - i) \tag{2.5.3}$$

wobei die rechte Ungleichung gilt, da $l > m$ ist und $\lambda_j \geq i$ gilt für $1 \leq j \leq l$. Aus (2.5.3) folgt dann

$$\mu_1 + \cdots + \mu_m > \lambda_1 + \cdots + \lambda_m \,,$$

also $\lambda \ngeq \mu$. □

2.6 Erhöhungs-Operatoren

In diesem Abschnitt arbeiten wir nicht mit Partitionen, sondern mit Vektoren (genauer gesagt n-Tupeln) $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$ von ganzen Zahlen. Dazu zuerst einen Exkurs zur symmetrischen Gruppe. Eine kurze Einleitung zu Permutationen kann man auf Wikipedia finden, siehe [Perm].

Eine Menge G zusammen mit einer assoziativen Verknüpfung $\cdot : G \times G \to G$ und einem Einselement $1_G \in G$ (mit $1_G \cdot g = g \cdot 1_G = g$ für alle $g \in G$) heisst ein Monoid. Existiert zudem für jedes $g \in G$ ein Inverses g' (mit $g' \cdot g = g \cdot g' = 1_G$), so heisst G eine *Gruppe.*

Beispiele. Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ mit Verknüpfung $+$ und Einselement $1_\mathbb{N} = 0$ bilden ein Monoid, die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$, mit Verknüpfung $+$ und Einselement $1_\mathbb{Z} = 0$ sind eine Gruppe (Inverses zu $a \in \mathbb{Z}$ ist $-a$).

Definition. Eine *Permutation* von $\{1, 2, \ldots, n\}$ ist eine bijektive Abbildung von der Menge $\{1, 2, \ldots, n\}$ nach $\{1, 2, \ldots, n\}$. Zwei Permutationen von $\{1, 2, \ldots, n\}$ werden verknüpft wie die übliche Komposition von Abbildungen. Damit bilden die Permutationen von $\{1, 2, \ldots, n\}$ eine Gruppe, geschrieben S_n, die *n-te symmetrische Gruppe.* Das Einselement von S_n ist die Identitätsabbildung $\mathrm{id} : i \mapsto i$, $\{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$.

Bemerkung. Zur Abkürzung sei $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$. Sind π und σ in S_n, so ist die Verknüpfung $\pi\sigma$ die Abbildung

$$\begin{tikzcd} {[n]} \arrow[r, "\sigma"'] \arrow[rr, bend left, "\pi\sigma"] & {[n]} \arrow[r, "\pi"'] & {[n]} \end{tikzcd}$$

Man kann $\sigma \in S_n$ als zweizeilige Matrix schreiben: in der ersten Zeile stehen $1, 2, \ldots, n$ und in der zweiten Zeile $\sigma(1), \ldots, \sigma(n)$: so sind zum Beispiel die Identität in S_5, resp. die Permutation, die 1 auf 3 schickt, 3 auf 4 und 4 auf 1, die 2 und 5 gleich lässt geschrieben als

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Es ist auch möglich, ein σ aus S_n als Zykeln zu schreiben. Man nimmt ein $i \in [n]$ und schreibt $(i, \sigma(i), \sigma^2(i), \ldots, \sigma^r(i))$, wobei $r \geq 0$ die kleinste Zahl ist mit $\sigma^{r+1}(i) = i$. Danach nimmt man ein neues i in $[n]$, das noch nicht vorgekommen ist, und tut dasselbe für dieses i. Das ergibt ebenso einen Zykel, etc. Die Permutation σ wird dann als Produkt von diesen (disjunkten) Zykeln geschrieben. Dabei ist $(123) = (231) = (312)$. Die zweite Permutation oben ist $(134)(2)(5)$. Oder kurz (134) (da 2 und 5 fest gehalten sind). Das Produkt der Zykeln ist unabhängig von der Reihenfolge.

Beispiele. 1) Die symmetrische Gruppe S_2 besteht nur aus zwei Elementen, nämlich der Identitätsabbildung id und der Permutation $\sigma_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = (12)$.

2) Die S_3 besteht aus 6 Elementen. Und zwar id, und dann die Permutationen

$$\begin{array}{ll} \sigma_{12}: \ (12) & \sigma_{123}: \ (123) \\ \sigma_{13}: \ (13) & \sigma_{132}: \ (132) \\ \sigma_{23}: \ (23) & \end{array}$$

Übung 6. S_n hat $n!$ Elemente. (Hinweis: Induktion über n: n Möglichkeiten für das Bild von n.)

Bemerkung. S_n wird von den Transpositionen $(i, i+1)$ $(i = 1, \ldots, n-1)$ erzeugt. Das heisst, dass jedes $\sigma \in S_n$ sich als Produkt von solchen Transpositionen schreiben lässt. (Kann mit Induktion über Zykel-Länge bewiesen werden).

Die symmetrische Gruppe S_n operiert auf $\mathbb{Z}^n$ durch permutieren der Koordinaten, die Menge

$$P_n := \{b \in \mathbb{Z}^n \mid b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n\}$$

ist ein *Fundamentalbereich* dieser Operation von S_n auf $\mathbb{Z}^n$.

Das bedeutet, dass die S_n-Bahn jedes $a \in \mathbb{Z}^n$ genau ein Element in P_n besitzt. Wir kürzen dieses Element mit a^+ ab. Das Element a^+ findet man, indem man die Einträge $a_1, a_2, \ldots, a_n$ in absteigender Reihenfolge hinschreibt.

Beispiel. Im Fall $n = 2$: die Elemente von $\mathbb{Z}^2$ sind (a_1, a_2) (mit $a_i \in \mathbb{Z}$). Die Identität lässt (a_1, a_2) gleich. Die Permutation σ_{12} schickt (a_1, a_2) auf (a_2, a_1). Die Bahn durch (a_1, a_2) ist dann gerade $\{(a_1, a_2), (a_2, a_1)\}$ und davon liegt genau ein Element in P_2, nämlich, falls $a_1 \geq a_2$ das Element $(a_1, a_2) = a^+$ (im Fall $a_1 = a_2$ hat die Bahn nur das eine Element (a_1, a_1)).

Wie bei der natürlichen (Teil-)Ordnung schreiben wir $a \geq b$ (für $a, b \in \mathbb{Z}^n$), falls gilt

$$a_1 + \cdots + a_i \geq b_1 + \cdots + b_i \quad (\text{für jedes } i \text{ mit } 1 \leq i \leq n)\,.$$

Lemma 2.6. *Sei $a \in \mathbb{Z}^n$. Dann gilt*

$$a \in P_n \iff a \geq wa \quad \textit{für alle } w \in S_n.$$

Beweis. Sei $a \in P_n$, d.h. sei $a_1 \geq \cdots \geq a_n$. Sei $b := wa$ (für ein $w \in S_n$). Dann ist $(b_1, \ldots, b_n)$ eine Permutation von $(a_1, \ldots, a_n)$ und daher ist

$$a_1 + \cdots + a_i \geq b_1 + \cdots + b_i$$

für $1 \leq i \leq n$, also $a \geq b$.

Umgekehrt: ist $a \geq wa$ für alle $w \in S_n$, so ist insbesondere

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) \geq (a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, a_i, a_{i+2}, \ldots, a_n)$$

für $1 \leq i \leq n-1$ (benutzt die Transposition $(i, i+1)$. Daraus folgt

$$a_1 + \cdots + a_{i-1} + a_i \geq a_1 + \ldots a_{i-1} + a_{i+1}\,,$$

also $a_i \geq a_{i+1}$ (für $1 \leq i \leq n-1$). Somit ist $a \in P_n$. □

Ein Element aus P_n, das oft gebraucht wird, ist

$$\delta := (n-1, n-2, \ldots, 1, 0)$$

Lemma 2.7. *Sei $a \in P_n$. Dann gilt für jedes Element $w \in S_n$:*

$$(a + \delta - w\delta)^+ \geq a\,.$$

Beweis. Da $\delta \in P_n$ gilt, ist $\delta \geq w\delta$ für alle $w \in S_n$ (nach Lemma 2.6). Damit ist

$$a + \delta - w\delta \geq a\,.$$

Sei $b := (a + \delta - w\delta)^+$. Dann liefert wieder Lemma 2.6 dass

$$b \geq a + \delta - w\delta$$

gilt, also $b \geq a$. □

5. Woche

Am 12. Oktober fällt die Vorlesung aus. Während dieser Woche sollte man die Uebungen 2, 3, 4 und 5 lösen und den Stoff der 5. Woche.

Nun definiert man für je zwei Zahlen i, j mit $1 \leq i < j \leq n$ die Abbildung $R_{ij} : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}^n$ durch

$$R_{ij}(a) = (a_1, \ldots, a_i + 1, \ldots, a_j - 1, \ldots, a_n)\,.$$

Jedes Produkt $R := \prod_{i<j} R_{ij}^{r_{ij}}$ (mit $r_{ij} \geq 0$) heisst ein *Erhöhungsoperator*.

Bemerkung. Die Reihenfolge der Terme im Produkt spielt keine Rolle, da die Terme miteinander kommutieren. Es ist $R_{ij}R_{kl} = R_{kl}R_{ij}$ für alle $1 \leq i < j \leq n$, $1 \leq k < l \leq n$. Im Fall $i < k < j < l$ sieht das so aus:

$$\begin{aligned}
R_{ij}R_{kl}(a) &= R_{ij}(a_1, \dots, a_k + 1, \dots, a_l - 1, \dots, a_n) \\
&= (a_1, \dots, a_i + 1, \dots, a_k + 1, \dots, a_j - 1, \dots, a_l - 1, \dots, a_n) \\
R_{kl}R_{ij}(a) &= R_{kl}(a_1, \dots, a_i + 1, \dots, a_j - 1, \dots, a_n) \\
&= (a_1, \dots, a_i + 1, \dots, a_k + 1, \dots, a_j - 1, \dots, a_l - 1, \dots, a_n)
\end{aligned}$$

Die Aussage von Lemma 2.8 ist klar für $R = R_{ij}$, damit aber auch für beliebige R.

Lemma 2.8. *Sei $a \in \mathbb{Z}^n$ und R ein Erhöhungsoperator. Dann ist $Ra \geq a$.*

Umgekehrt hat man das folgende:

Lemma 2.9. *Sind a, $b \in \mathbb{Z}^n$ mit $a \leq b$ und $a_1 + \dots + a_n = b_1 + \dots + b_n$, so existiert ein Erhöhungsoperator R mit $b = Ra$.*

Beweis. Man kann den Erhöhungsoperator

$$R := \prod_{k=1}^{n-1} R_{k,k+1}^{r_k}$$

nehmen mit $r_k = \sum_{i=1}^{k}(b_i - a_i) \geq 0$. □

Vor dem letzten Resultat dieses Abschnitts noch eine Bezeichnung: sind λ und μ Partitionen von n mit $\lambda \geq \mu$, so sagt man, dass λ *und* μ *unter der natürlichen Ordnung benachbart sind*, falls aus $\lambda \geq \nu \geq \mu$ folgt, dass $\nu = \lambda$ ist oder $\nu = \mu$.

Lemma 2.10. *Seien $\lambda \geq \mu$ Partitionen von n, die unter der natürlichen Ordnung benachbart sind. Dann ist $\lambda = R_{ij}\mu$ für ein Paar $i < j$.*

Beweis. Sei zunächst $\lambda_1 > \mu_1$ und $i \geq 2$ die kleinste Zahl, für die gilt $\lambda_1 + \dots + \lambda_i = \mu_1 + \dots + \mu_i$. Dann ist $\mu_i > \lambda_i \geq \lambda_{i+1} \geq \mu_{i+1}$, also $\mu_i > \mu_{i+1}$. Daraus folgt, dass $\nu := R_{1i}\mu$ eine Partition (von n) ist und es ist $\lambda \geq \nu$. Also muss $\lambda = \nu = R_{1i}\mu$ gelten.

Falls $\lambda_1 = \mu_1$ ist, so existiert ein $j > 1$ mit $\lambda_k = \mu_k$ für $k < j$ und $\lambda_j > \mu_j$. Dasselbe Argument wie oben kann nun auf die Partitionen $(\lambda_j, \lambda_{j+1}, \dots)$ und $(\mu_j, \mu_{j+1}, \dots)$ angewendet werden. □

Bemerkung. Das Lemma 2.10 liefert einen alternativen Beweis von Lemma 2.5, denn es zeigt, dass es genügt, Lemma 2.5 im Fall $\lambda = R_{ij}\mu$ zu beweisen. Und in diesem Fall ist die Aussage klar.

2.7 Beispiele und Übungen

Lemma 2.11. *Setzt man*

$$f_{\lambda,n}(t) := \sum_{i=1}^{n} t^{\lambda_i+n-i}\,,$$

so übersetzt sich die Aussage von Lemma 2.1 in die Gleichung

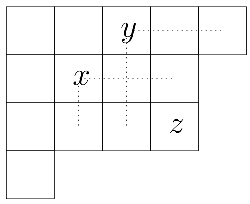
$$f_{\lambda,n}(t) + t^{m+n-1} f_{\lambda',m}(t^{-1}) = (1-t^{m+n})/(1-t)\,. \tag{2.7.1}$$

Definition. Sei λ eine Partition. Die *Hakenlänge von λ an der Stelle $x = (i,j) \in \lambda$* ist definiert als

$$h(x) := h(i,j) := \lambda_i + \lambda'_j - i - j + 1\,.$$

Dabei versteht man unter $x = (i,j) \in \lambda$ die Box in der i-ten Zeile und der j-ten Spalte vom Diagramm von λ.

Zur Illustration, mit $\lambda = (54^21)$:



Hier sind $h(x) = h(2,2) = 4+3-2-2+1 = 4$, $h(y) = h(1,3) = 5+3-1-3+1 = 5$ und $h(z) = h(3,4) = 4+3-3-4+1 = 1$. Das sind gerade die Anzahl Quadrate, die rechts von und unterhalb der gewählten Box liegen (inkl. der gewählten Box selbst).

Beispiel 2. Sei λ eine Partition und sei zur Abkürzung $\mu_i := \lambda_i + n - i$ (für $1 \le i \le n$, wobei $n \ge \lambda_1$ sei). Die Produkte der Hakenlängen von λ lässt sich wie folgt beschreiben:

$$\prod_{x\in\lambda} h(x) = \frac{\prod_{i\ge 1} \mu_i!}{\prod_{i<j}(\mu_i - \mu_j)}\,.$$

Beweis. Aus (2.7.1) in Lemma 2.11, für λ und λ' vertauscht, und mit $m = \lambda_1$ ergibt sich (weiterhin mit $n \ge \lambda_1$)

$$\sum_{j=1}^{\lambda_1} t^{\lambda'_j+\lambda_1-j} + \sum_{j=1}^{n} t^{\lambda_1-1+j-\lambda_j} = \sum_{j=0}^{\lambda_1+n-1} t^j$$

oder, mit $\mu_i = \lambda_i + n - i$ für $1 \le i \le n$,

$$\sum_{j=1}^{\lambda_1} t^{h(1,j)} + \sum_{j=2}^{n} t^{\mu_1-\mu_j} = \sum_{j=1}^{\mu_1} t^j\,. \tag{2.7.2}$$

Schreibt man diese Identität für die (abgeschnittenen) Partitionen $(\lambda_i, \lambda_{i+1}, \dots)$ für $i = 1, 2, \dots, l(\lambda)$, so erhält man

$$\sum_{x\in\lambda} t^{h(x)} + \sum_{i<j} t^{\mu_i-\mu_j} = \sum_{i\geq 1}\sum_{j=1}^{\mu_i} t^j \,. \tag{2.7.3}$$

Aus (2.7.3) folgt nun

$$\prod_{x\in\lambda}(1-t^{h(x)}) = \frac{\prod_{i\geq 1}\prod_{j=1}^{\mu_j}(1-t^j)}{\prod_{i<j}(1-t^{\mu_i-\mu_j})}$$

und, wenn man nun davon beide Seiten durch $(1-t)^{|\lambda|}$ teilt und $t = 1$ setzt, dass

$$\prod_{x\in\lambda} h(x) = \frac{\prod_{i\geq 1}\mu_i!}{\prod_{i<j}(\mu_i-\mu_j)} \,. \tag{2.7.4}$$

□

Bemerkung. Das Produkt $\prod_{x\in\lambda} h(x)$ aller Hakenlängen einer Partition ist wichtig, da es im Zusammenhang mit den Darstellungen der symmetrischen Gruppe S_r (wobei $r = |\lambda|$ das Gewicht von λ sei) auftaucht. Mehr dazu im Kapitel 4 von [FH91]. Kurz gesagt: die symmetrische Gruppe S_r hat genau soviele irreduzible Darstellungen, wie es Partitionen von r gibt. Jede irreduzible Darstellung von S_r ist gerade durch eine Partition λ von r gegeben. Man schreibt entsprechend V_λ, um diese irreduzible Darstellung zu bezeichnen. Nun kann man die Dimension von V_λ berechnen: die Formel über die Hakenlänge (4.12 in [FH91]) besagt, dass die Dimension der irreduziblen Darstellung V_λ von S_r zur Partition λ durch den folgenden Ausdruck gegeben ist:

$$\frac{r\,!}{\prod_{x\in\lambda} h(x)} \,.$$

6. Woche

Für die nächsten zwei Behauptungen benötigen wir $n(\lambda)$, zur Erinnerung: $n(\lambda)$ ist definiert als die Summe der mit $i-1$ gewichteten Teile λ_i von λ:

$$n(\lambda) = \sum_{i\geq 1}(i-1)\lambda_i \,.$$

In den nachfolgenden Übungen werden einige Eigenschaften von Partitionen zusammengetragen.

Übung 7. Die Summe der Hakenlängen von λ ist

$$\sum_{x\in\lambda} h(x) = n(\lambda) + n(\lambda') + |\lambda| \,.$$

Definition. Der *Inhalt* von $x = (i, j) \in \lambda$ ist definiert als

$$c(x) := j - i$$

($c(x)$ für *content* von x).

Übung 8. Sei λ eine Partition. Dann ist

$$\sum_{x \in \lambda} c(x) = n(\lambda') - n(\lambda)\,.$$

Übung 9. Für jede Partition λ gilt

$$\sum_{x \in \lambda} (h(x)^2 - c(x)^2) = |\lambda|^2\,.$$

Übung 10. Sei λ eine Partition, seien r, $s > 1$. Dann gilt folgendes:

$$\lambda_i - \lambda_{i+r} \geq s \text{ für alle } i \leq l(\lambda) \iff \lambda'_j - \lambda'_{j+s} \leq r \text{ für alle } j \leq l(\lambda')\ .$$

7. Woche

3 Der Ring der symmetrischen Funktionen

Seien $\Lambda(n) = \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$ die Polynome in n Variablen $x_1, \ldots, x_n$. Diese bilden einen Ring. Ganz kurz hier, was ein Ring ist:

Definition. Ein *Ring* R ist eine abelsche[3] Gruppe $(R, +)$ (mit einer Operation geschrieben als $+$, mit 0 als neutralem Element) zusammen mit einer zweiten Operation $*$, so dass für alle a, b, c aus R gilt:

$$\begin{aligned} a * (b * c) &= (a * b) * c \\ a * (b + c) &= (a * b) + (a * c) \\ (a + b) * c &= (a * c) + (b * c) \end{aligned}$$

Existiert ein Einheitselement e für diese zweite Operation, das heisst, gilt

$$a * e = e * a = a$$

für alle $a \in R$, so heisst R ein *Ring mit Eins*.

Im Fall von $\Lambda(n)$ ist nun die Operation $+$ die übliche Addition, die Operation $*$ die Multiplikation. Das Einselement von $\Lambda(n)$ ist einfach die Zahl 1.

[3]abelsch=kommutativ: es gilt $a + b = b + a$ für alle a, b in R

3.1 Symmetrische Polynome

Wie früher erwähnt, operiert die symmetrische Gruppe S_n auf dem Ring $\Lambda(n)$ durch Vertauschen der Variablen. Ein Polynom $f \in \Lambda(n)$ heisst *symmetrisch*, falls es invariant ist unter dieser Operation. Das heisst, dass $f(x_1, \ldots, x_n) = f^\sigma(x_1, \ldots, x_n) := f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$ ist für jedes $\sigma \in S_n$.

Die Menge aller symmetrischen Polynome wird nun mit

$$\Lambda_n := \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]^{S_n}$$

bezeichnet, die symmetrischen Polynome bilden einen Unterring[4] von $\Lambda(n)$. (Das sollte klar sein).

Nun benötigen wir zwei weitere Ausdrücke:

Definition. Ein Ring R (mit $+$ und $*$) heisst *graduiert*, falls R sich schreiben lässt als direkte Summe von (abelschen) Gruppen

$$R = \oplus_{n\in\mathbb{N}} R_n = R_0 \oplus R_1 \oplus R_2 \oplus \ldots ,$$

wobei die Multiplikation $*$ des Rings R Elemente aus $R_p \times R_q$ auf R_{p+q} abbildet. Das heisst nichts anderes, als dass für $x \in R_p$ und $y \in R_q$ das Produkt $x * y$ in R_{p+q} liegt, also $R_p R_q \subseteq R_{p+q}$ (zur Abkürzung lassen wir $*$ weg und schreiben einfach $R_p R_q$ für $R_p * R_q$).

Die Elemente von R_k heissen *homogene Elemente vom Grad k.*

Übung 11. Als Beispiel kann man den Ring $R = \mathbb{Z}[x]$ der Polynome in einer Variablen x mit ganzzahligen Koeffizienten betrachten. Wie sieht eine naheliegende Graduierung von R aus (was sind die R_k)? Was ist ein homogenes Polynom vom Grad k in R?

In unserem Fall ist der Ring, den wir betrachten $\Lambda_n \subset \Lambda(n)$. Zunächst zu der Begriff der Homogenität für Elemente aus $\Lambda(n)$: Wir sagen, dass $f \in \Lambda(n)$ *homogen vom Grad k ist*, falls f von der Form

$$\sum_{k_1+\cdots+k_n=k} a_{k_1,\ldots,k_n} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n}$$

ist (mit $a_{k_1,\ldots,k_n} \in \mathbb{Z}$). Wir definieren dann Λ_n^k als die Menge aller homogenen symmetrischen Polynome vom Grad k, zusammen mit dem 0-Polynom. Damit erhält man, dass Λ_n graduiert ist:

$$\Lambda_n = \oplus_{k\geq 0} \Lambda_n^k .$$

Für jedes $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ schreibt man zur Abkürzung x^α für das Monom[5]

$$x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n} .$$

---

[4] eine Menge $R' \subset R$ heisst ein *Unterring von R*, falls R' zusammen mit den beiden auf R' eingeschränkten Verknüpfungen $+$ und $*$ wieder ein Ring ist.

[5] ein *Monom* ist ein Polynom, das nur aus einem Summanden der Gestalt $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$ besteht

Sei nun λ eine Partition der Länge $\leq n$. Wir definieren ein Polynom $m_\lambda \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$ wie folgt:

$$m_\lambda(x_1, \ldots, x_n) := \sum_\alpha x^\alpha$$

wobei die Summe rechts über alle verschiedenen (!) Permutationen $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ von $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ läuft (dabei können einige der $\lambda_i = 0$ sein, da wir Länge $\leq n$ voraussetzen).

Bemerkung. 1) Wenn wir nun λ variieren lassen, so bilden alle die m_λ (λ Partitionen der Länge höchstens n) eine $\mathbb{Z}$-Basis von Λ_n.

2) Daher sind die m_λ mit $l(\lambda) \leq n$ und $|\lambda| = k$ gerade eine $\mathbb{Z}$-Basis von Λ_n^k. Insbesondere sind für jedes $n \geq k$ die m_λ mit $|\lambda| = k$ eine $\mathbb{Z}$-Basis von Λ_n^k.

Dies kann man am folgenden Beispiel gut sehen:

Beispiel. Sei $n = 3$, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ mit $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$. Dann ist

$$m_\lambda \;=\; x_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}x_3^{\lambda_3} + x_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_3}x_3^{\lambda_2} + x_1^{\lambda_2}x_2^{\lambda_1}x_3^{\lambda_3} + x_1^{\lambda_2}x_2^{\lambda_3}x_3^{\lambda_1} + x_1^{\lambda_3}x_2^{\lambda_1}x_3^{\lambda_2} + x_1^{\lambda_3}x_2^{\lambda_2}x_3^{\lambda_1}\,.$$

Sind nicht alle Teile von λ verschieden, so fallen einige Terme in der obigen Summe weg, denn dann sind nicht alle 6 Permutationen von $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ verschieden.

Für $k = 1$ ist $m_{(1,0,0)}$ erhält man als $\mathbb{Z}$-Basis von $\Lambda_3^1 = (\mathbb{Z}[x_1, x_2, x_3]^{S_3})^1$,

$$m_{(1,0,0)} \;=\; x_1 + x_2 + x_3\,.$$

Für $k = 2$ sind $m_{(1,1,0)}$, $m_{(2,0,0)}$ eine Basis von Λ_3^2, wobei

$$\begin{aligned} m_{(1,1,0)} &= x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 \\ m_{(2,0,0)} &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\,. \end{aligned}$$

Für $k = 3$ bilden $m_{(1,1,1)}$, $m_{(2,1,0)}$ und $m_{(3,0,0)}$ eine Basis von Λ_3^2:

$$\begin{aligned} m_{(1,1,1)} &= x_1x_2x_3 \\ m_{(2,1,0)} &= x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + x_1x_2^2 + x_2^2x_3 + x_1x_3^2 + x_2x_3^2 \\ m_{(3,0,0)} &= x_1^3 + x_2^3 + x_3^3\,. \end{aligned}$$

Eine $\mathbb{Z}$-Basis von Λ_3 kann man folgendermassen hinschreiben:

$$\{m_{(0,0,0)}\ , m_{(1,0,0)},\ m_{(2,0,0)},\ m_{(1,1,0)},\ m_{(3,0,0)},\ m_{(2,1,0)},\ m_{(1,1,1)}, \ldots\}$$

oder

$$\{m_{(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)} \mid \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq 0\}\,.$$

3.2 Symmetrische Funktionen

Oft ist die Zahl der Variablen in Anwendungen unwichtig, sofern es genügend davon hat. Daher ist es dann praktischer, mit symmetrischen Funktionen in unendlich vielen Variablen zu arbeiten. Dazu kommen wir hier.

Sei $m \geq n$. Wir betrachten die Abbildung (den Homomorphismus)

$$\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_m] \to \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]\,,$$

die die Variablen $x_{n+1}, \ldots, x_m$ auf Null schickt und x_i auf x_i (für $i \leq n$). Wenn man diese Abbildung einschränkt auf Λ_m, so erhält man eine Abbildung (einen Homomorphismus)

$$\rho_{m,n} : \Lambda_m \to \Lambda_n\,,$$

die auf der Basis (m_λ) von Λ_m die folgende Auswirkung hat:

$$m_\lambda(x_1, \ldots, x_m) \quad \mapsto \quad \begin{cases} m_\lambda(x_1, \ldots, x_n) & \text{falls } l(\lambda) \leq n \text{ ist} \\ 0 & \text{falls } l(\lambda) > n \text{ ist.} \end{cases}$$

Die Abbildungen $\rho_{m,n}$ sind also surjektiv. Wenn wir nun auf Λ_m^k einschränken, so gibt dies Abbildungen

$$\rho_{m,n}^k : \Lambda_m^k \to \Lambda_n^k$$

für jedes $k \geq 0$, $m \geq n$, die surjektiv sind und bijektiv für $m \geq n \geq k$, d.h. $\rho_{m,n}$ ist für $m \geq n \geq k$ ein Isomorphismus. Was wir nun wollen, ist, alle homogenen symmetrischen Polynome vom Grad k zu betrachten:

Definition. Sei

$$\Lambda^k := \left\{ f = (f_n)_{n \geq 0} \;\middle|\; \begin{array}{l} f_n = f_n(x_1, \ldots, x_n) \in \Lambda_n^k, \\ f_m(x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0) = f_n(x_1, \ldots, x_n) \text{ für } m \geq n. \end{array} \right\}$$

die Menge der Folgen $f = (f_n)_{n \geq 0}$, wobei jedes f_n ein homogenes symmetrisches Polynomen vom Grad k in $x_1, \ldots, x_n$ ist und wo für $m \geq n$ gilt, dass $f_m(x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0)$ gleich $f_n(x_1, \ldots, x_n)$ ist.

8. Woche

Da $\rho_{m,n}^k$ ein Isomorphismus ist für $m \geq n \geq k$ folgt, dass die Projektion

$$\rho_n^k : \Lambda^k \to \Lambda_n^k\,,$$

die $f = (f_n)_n$ auf f_n schickt, ein Isomorphismus ist für jedes $n \geq k$. Damit besitzt Λ^k eine $\mathbb{Z}$-Basis bestehende aus den *monomialen symmetrischen Funktionen* m_λ (für alle Partitionen λ von k), die durch

$$\rho_n^k(m_\lambda) = m_\lambda(x_1, \ldots, x_n)$$

definiert sind (für alle $n \geq k$). Ein Beispiel mit $m_{(2)}$ und $m_{(1,1)}$ kann man weiter unten finden (Beispiel 3.3).

Wir ändern nun die Notation und verwenden ab jetzt Λ für folgende Summe:

$$\Lambda := \bigoplus_{k \geq 0} \Lambda^k$$

Bemerkung. Dies hier als zusätzliche Information - es wird nicht in der Vorlesung besprochen.

1. Man kann sagen, dass Λ^k der inverse Limes

   $$\varprojlim_n \Lambda_n^k$$

   der $\mathbb{Z}$-Moduln Λ_n^k ist bezüglich des Homomorphismus $\rho_{m,n}^k$.

2. Aus obigen Überlegungen folgt, dass Λ^k ein freier $\mathbb{Z}$-Modul vom Rank $p(k)$ (die Anzahl der Partitionen von k) ist.

   Nach Definition ist dann Λ ein freier $\mathbb{Z}$-Modul, der durch die m_λ erzeugt wird, für *alle* Partitionen λ.

3. Nun haben wir für jedes $n \geq 0$ eine surjektive Abbildung (Morphismus)

   $$\rho_n = \oplus_{k \geq 0} : \Lambda \to \Lambda_n \, ;$$

   ρ_n ist ein Isomorphismus in den Graden $k \leq n$. Der Ring Λ ist graduiert und die ρ_n sind Ringhomomorphismen.

Definition. Man nennt den so definierten Ring Λ den *Ring der symmetrischen Funktionen in den abzählbar unendlich vielen Variablen* $x_1, x_2, \dots$.

Dazu ist zu bemerken, dass die Elemente von Λ keine Polynome mehr sind (im Gegensatz zu den Elementen von Λ_n). Sie sind formal unendliche Summen von Monomen.

Bemerkung. Man könnte anstatt Polynomen über $\mathbb{Z}$ genausogut Polynome über einem beliebigen kommutativen Ring A betrachten. Damit würde man entsprechend den Ring $\Lambda_A \cong \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} A$ erhalten anstatt Λ.

3.3 Elementare symmetrische Funktionen

Eine weitere Basis von Λ wird durch die elementar-symmetrischen Funktionen e_r gegeben (siehe Satz 3.2).

Für jedes $r \geq 0$ ist die r-te elementar-symmetrische Funktion definiert als die Summe aller Produkte von r verschiedenen Variablen x_i. Damit ist $e_0 = 1$ und

$$e_r = \sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_r} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_r} = m_{(1^r)}$$

für $r \geq 1$.

Zunächst hier ein Einschub zu erzeugenden Funktionen:

Definition. Eine Funktion f mit

$$f(t) = \sum_{k \geq 0} a_k t^k \quad \text{oder} \quad f(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k$$

heisst *erzeugende Funktion* für die Koeffizienten a_k.

Die Funktion f beschreibt also die Folge der Koeffizienten a_k. Erzeugende Funktionen sind nützlich, um Informationen über die Folge der Koeffizienten a_k zu erhalten. (Als Potenzreihe konvergiert f nicht unbedingt überall, d.h. nicht für alle Werte von t).

Beispiel. Die erzeugende Funktion der konstanten Folge $(a_k)_k = (1, 1, 1, \dots)$ ist:

$$f(t) = \frac{1}{1-t} = \sum_{n \geq 0} t^n \,.$$

Die Gleichheit gilt nur für $|t| < 1$. Man überprüft, dass gilt $(1-t)\sum_{n\geq 0} t^n = 1$. Andere Folgen a_k kann man aus dieser erzeugenden Funktion herleiten. Zum Beispiel kann die Folge $1, a, a^2, a^3, \dots$ folgendermassen beschrieben werden:

$$\sum_{n \geq 0} a^n x^n = \frac{1}{1-ax} \,.$$

(Insbesondere, für $a = -1$, ...)

Bemerkung. Polynome sind besondere erzeugende Funktionen, sie gehören zu endlichen Folgen.

Zurück zu den elementar-symmetrischen Funktionen e_r: Die erzeugende Funktion für die e_r ist

$$E(t) := \sum e_r t^r = \prod_{i \geq 1} (1 + x_i t) \tag{3.3.1}$$

Das kann man leicht sehen, wenn man das Produkt auf der rechten Seite ausmultipliziert.

Sei nun die Anzahl der Variablen beschränkt, i.e. seien die Variablen $x_1, \dots, x_n$. Dann ist $e_r = 0$ für jedes $r > n$ und (3.3.1) wird zu

$$\sum_{r=0}^{n} e_r t^r = \prod_{i=1}^{n} (1 + x_i t) \,.$$

Beide Seiten sind nun Elemente von $\Lambda_n[t]$.

Beispiel. Zur Illustration sei $n = 4$. Dann ist:

$$\begin{aligned}
\sum_{r=0}^{4} e_r t^r &= \prod_{i=1}^{4} (1 + x_i t) \\
&= (1 + x_1 t)(1 + x_2 t)(1 + x_3 t)(1 + x_4 t) \\
&= 1 + (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)t + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4)t^2 \\
&\quad + (x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 + x_2x_3x_4)t^3 + x_1x_2x_3x_4 t^4 \\
&= e_0 t^0 + e_1 t + e_2 t^2 + e_3 t^3 + e_4 t^4
\end{aligned}$$

Sei $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ eine Partition. Aus den e_r konstruiert man nun Funktionen e_λ wie folgt.

$$e_\lambda = e_{\lambda_1} \cdot e_{\lambda_2} \cdot e_{\lambda_3} \cdots$$

Dann können wir einen Zusammenhang zwischen den e_λ und den monomialen symmetrischen Funktionen m_λ herstellen. Zuerst betrachten wir dazu ein Beispiel.

Beispiel. Sei $\lambda = (2)$, also $\lambda' = (1, 1)$. Es ist

$$e_{(1,1)} = (x_1 + x_2 + \dots)(x_1 + x_2 + \dots)$$

und

$$m_{(2)} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots$$

Daraus erhält man die Gleichung

$$e_{(1,1)} \quad = \quad m_{(2)} + 2 \cdot \sum_{i<j} x_i x_j = m_{(2)} + 2m_{(1,1)} \, .$$

Allgemeiner hat man das folgende:

Lemma 3.1. *Sei λ eine Partition und λ' die konjugierte davon. Dann existieren Zahlen $a_{\lambda\mu} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ für $\mu < \lambda$, so dass gilt:*

$$e_{\lambda'} = m_\lambda + \sum_{\mu<\lambda} a_{\lambda\mu} m_\mu = \sum_{\mu\leq\lambda} a_{\lambda\mu} m_\mu$$

Beweis. Multipliziert man die linke Seite aus, d.h. $e_{\lambda'} = e_{\lambda'_1} e_{\lambda'_2} \dots$, so erhält man eine Summe von Monome. Diese Monome sind alle von der Gestalt

$$(x_{i_1} x_{i_2} \dots)(x_{j_1} x_{j_2} \dots) \cdots = x^\alpha \, ,$$

mit $i_1 < i_2 < \dots$ und $j_1 < j_2 < \dots$, etc., und mit $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$.

Behauptung: Es ist $\alpha \leq \lambda$:
Man füllt die Zahlen $i_1, i_2, \dots, i_{\lambda'_1}$ in die erste Spalte vom Diagramm von λ, dann die Zahlen $j_1, j_2, \dots, j_{\lambda'_2}$ in die zweite Spalte von λ, etc. (immer geordnet).

Für jedes $r \geq 1$ liegen die Zahlen bis und mit r, die so ins Diagramm von λ geschrieben werden in in den ersten r Zeilen von λ. Damit ist $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_r \leq \lambda_1 + \lambda_2 \dots + \lambda_r$ für jedes $r \geq 1$, also $\alpha \leq \lambda$.

Nach Lemma 2.6 folgt dann, dass α in der Bahn von einem $\mu \leq \lambda$ liegt unter der symmetrischen Gruppe. Fasst man die Summanden alle zusammen, so gibt das

$$e_{\lambda'} = \sum_{\mu\leq\lambda} a_{\lambda\mu} m_\mu$$

mit $a_{\lambda\mu} \geq 0$ für jedes $\mu \leq \lambda$. Wobei man sich überlegt, dass $a_{\lambda\lambda} = 1$ ist, m_λ also genau einmal auftritt. $\square$

Satz 3.2. *Es ist*

$$\Lambda = \mathbb{Z}[e_1, e_2, \dots]$$

und die e_r sind algebraisch unabhängig über $\mathbb{Z}$.

Beweis. Wir wissen schon, dass die m_λ eine $\mathbb{Z}$-Basis von Λ bilden. Nun zeigt Lemma 3.1, dass die e_λ eine andere Basis bilden, d.h. man kann also jedes Element von Λ eindeutig als Polynom in den e_r ausdrücken. □

Bemerkung. Wenn wir nur endlich viele Variablen $x_1, \dots, x_n$ haben, so sagt Satz 3.2, dass $\Lambda_n = \mathbb{Z}[e_1, \dots, e_n]$ ist und dass die elementar-symmetrischen Polynome $e_1, \dots, e_n$ algebraisch unabhängig sind. Diese Aussage heisst auch das *Fundamentaltheorem über symmetrische Funktionen.*

3.4 Vollständige symmetrische Funktionen

Auch die vollständigen symmetrischen Funktionen liefern eine Basis für Λ, wie wir hier sehen werden.

Definition. Für jedes $r \geq 0$ ist die *r-te vollständige symmetrische Funktion h_r* definiert als die Summe aller Monome in $x_1, x_2, \dots$ von totalem Grad r:

$$h_r = \sum_{|\lambda|=r} m_\lambda .$$

Insbesondere ist $h_0 = 1$ und $h_1 = e_1 = x_1 + x_2 + x_3 + \dots$. Man setzt am besten $h_r = e_r = 0$ für $r < 0$.

Die erzeugende Funktion für die h_r ist

$$H(t) = \sum_{r \geq 0} h_r t^r = \prod_{i \geq 1} (1 - x_i t)^{-1} . \tag{3.4.1}$$

Um das zu sehen, betrachtet man

$$(1 - x_i t)^{-1} = \sum_{k \geq 0} x_i^k t^k$$

und multipliziert die Reihen zusammen.

Aus (3.3.1) und (3.4.1) erhält man die Gleichung

$$H(t)E(-t) = 1$$

oder, anders gesagt, man hat für jedes $n \geq 1$

$$\sum_{r=0}^{n} (-1)^r e_r h_{n-r} = 0 \tag{3.4.2}$$

Ziel ist nun das folgende Resultat:

Satz 3.3. *Es ist*

$$\Lambda = \mathbb{Z}[h_1, h_2, \dots]$$

und die h_r sind algebraisch unabhängig über $\mathbb{Z}$.

9. Woche

Nach Satz 3.2 sind die e_r algebraisch unabhängig. Daher können wir eine Abbildung (Homomorphismus) von graduierten Ringen definieren:

$$\begin{aligned} \omega: \quad & \Lambda \to \Lambda \\ & e_r \mapsto h_r \end{aligned}$$

für jedes $r \geq 0$. Die Symmetrie der Gleichungen (3.4.2) zwischen den e's und den h's liefert dann folgendes:

Lemma 3.4. *ω ist eine Involution, d.h. ω^2 ist die Identitätsabbildung.*

Daraus folgt daraus, dass ω ein Automorphismus ist. Dank Satz 3.2 erhalten wir dann die Aussage von Satz 3.3.

Bemerkung. Gibt es nur endlich viele Variablen $x_1, \ldots, x_n$, so ist $e_r = 0$ für $r > n$. Die Abbildung $\omega : \Lambda_n \to \Lambda_n$ ist definiert durch $\omega(e_r) = h_r$ für $1 \leq r \leq n$, sie ist nach (3.4.2) ebenfalls eine Involution. Es gilt $\Lambda_n = \mathbb{Z}[h_1, \ldots, h_n]$ mit algebraisch unabhängigen $h_1, h_2, \ldots, h_n$, aber die $h_{n+1}, h_{n+2}, \ldots$ sind Polynome verschieden von Null in $h_1, \ldots, h_n$ (oder in $e_1, \ldots, e_n$).

Wie bei den elementar-symmetrischen Funktionen definieren wir nun

$$h_\lambda = h_{\lambda_1} \cdot h_{\lambda_2} \cdots$$

für jede Partition $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots)$. Nach Satz 3.3 sind die h_λ eine $\mathbb{Z}$-Basis von Λ. Wir haben nun also drei $\mathbb{Z}$-Basen, die alle durch Partitionen indiziert sind: m_λ, die e_λ und die h_λ. Die letzten beiden entsprechen sich unter der Involution ω.

Bemerkung. Setzt man für jede Partition λ

$$f_\lambda := \omega(m_\lambda)\,,$$

so erhält man eine vierte $\mathbb{Z}$-Basis von Λ. Die f_λ haben keine einfache direkte Beschreibung, sie werden daher nicht besonders betrachtet.

Die Gleichungen (3.4.2) führen zu einer sogenannten Determinanten-Identität, die wir später im Kapitel 6 benutzen werden. Für ein $N > 0$ betrachten wir die $N+1 \times N+1$-Matrizen

$$H := (h_{i-j})_{0 \leq i,j \leq N} \quad E := ((-1)^{i-j} e_{i-j})_{0 \leq i,j \leq N}$$

unter der Konvention, dass $h_r = e_r = 0$ sind für $r < 0$, wie oben schon erwähnt. Nach Definition sind H und E untere Dreiecksmatrizen mit 1en auf der Diagonalen. Daher ist $\det H = \det E = 1$. Ausserdem folgt aus den Gleichungen (3.4.2), dass H und E Inverse voneinander sind. Sei E' die transponierte Matrix von E (i.e. die Matrix, die man durch Spiegelung entlang der Hauptdiagonalen erhält). Dann folgt, dass jeder Minor von H gleich dem komplementären Cofaktor von E' ist (falls man Minoren und Cofaktoren nicht aus der linearen Algebra kennt, so kann man auf [Min] deren Definition nachlesen).

Seien nun λ und μ zwei Partitionen der Länge $\leq p$ mit der Eigenschaft, dass λ' und μ' Länge $\leq q$ haben, für $p+q=N+1$. Wir betrachten den Minor von H zum Zeilenindex λ_i+p-i und Spaltenindex μ_i+p-i (für $1\leq i\leq p$). Nach Lemma 2.1 hat der komplementäre Cofaktor von E' Zeilenindex $p-1+j-\lambda'_j$ und Spaltenindex $p-1+j-\mu'_j$ $(1\leq j\leq q)$. Also erhält man die Gleichung

$$\det(h_{\lambda_i-\mu_j-i+j})_{1\leq i,j\leq p}=(-1)^{|\lambda|+|\mu|}\det((-1)^{\lambda'_i-\mu'_j-i+j}e_{\lambda'_i-\mu'_j-i+j})_{1\leq i,j\leq q}$$

Die Vorzeichen heben sich gegenseitig auf, daher erhält man

$$\det(h_{\lambda_i-\mu_j-i+j})_{1\leq i,j\leq p}=\det(e_{\lambda'_i-\mu'_j-i+j})_{1\leq i,j\leq q} \tag{3.4.3}$$

und, für $\mu=0$ gibt dies insbesondere

$$\det(h_{\lambda_i-i+j})_{1\leq i,j\leq p}=\det(e_{\lambda'_i-i+j})_{1\leq i,j\leq q} \tag{3.4.4}$$

3.5 Potenzsummen

Die Potenzzummen sind weitere symmetrische Funktionen. Sie bilden jedoch keine $\mathbb{Z}$-Basis von Λ wie wir weiter unten sehen werden.

Für jedes $r\geq 1$ ist die *r-te Potenzsumme* definiert als

$$p_r:=\sum x_i^r=M_{(r)}\,.$$

Die erzeugende Funktion für die p_r ist

$$\begin{aligned}P(t)&=\sum_{r\geq 1}p_rt^{r-1}=\sum_{i\geq 1}\sum_{r\geq 1}x_i^rt^{r-1}\\&=\sum_{i\geq 1}\frac{x_i}{1-x_it}\\&=\sum_{i\geq 1}\frac{d}{dt}\log\frac{1}{1-x_it}\,.\end{aligned}$$

Daraus erhält man

$$P(t)=\frac{d}{dt}\log\prod_{i\geq 1}(1-x_i)^{-1}=\frac{d}{dt}\log H(t)=H'(t)/H(t) \tag{3.5.1}$$

und, analog,

$$P(-t)=\frac{d}{dt}\log E(t)=E'(t)/E(t)\,. \tag{3.5.2}$$

10. Woche

Aus (3.5.1) und (3.5.1) ergibt sich für $n \geq 1$

$$nh_n = \sum_{r=1}^{n} p_r h_{n-r} \tag{3.5.3}$$

und

$$ne_n = \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r-1} p_r e_{n-r} \,. \tag{3.5.4}$$

Diese Gleichungen erlauben es uns, die h's und die e's durch die p' auszudrücken und umgekehrt. Die Gleichungen (3.5.4) gehen zurück auf I. Newton, sie sind bekannt als Newtons Formeln. Aus (3.5.3) folgt, dass $h_n \in \mathbb{Q}[p_1, \ldots, p_n]$ liegt und $p_n \in \mathbb{Z}[h_1, \ldots, h_n]$. Damit ist

$$\mathbb{Q}[p_1, \ldots, p_n] = \mathbb{Q}[h_1, \ldots, h_n] \,.$$

Lemma 3.5. *Es ist $\Lambda_{\mathbb{Q}} = \Lambda \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q} = \mathbb{Q}[p_1, p_2, \ldots]$ und die p_r sind algebraisch unabhängig über $\mathbb{Q}$.*

Beweis. Die h_r sind algebraisch unabhängig über $\mathbb{Z}$, also auch über $\mathbb{Q}$, die Behauptung folgt dann mit obigen Überlegungen (i.e. mit $\mathbb{Q}[p_1, \ldots, p_n] = \mathbb{Q}[h_1, \ldots, h_n]$). □

Definieren wir nun ähnlich wie früher

$$p_\lambda := p_{\lambda_1} \cdot p_{\lambda_2} \cdots$$

für jede Partition $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots)$, so bilden die p_λ eine $\mathbb{Q}$-Basis von $\Lambda_{\mathbb{Q}}$.

Bemerkung. Die p_λ bilden keine $\mathbb{Z}$-Basis von Λ. Es ist zum Beispiel $h_2 = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2)$, die Funktion h_2 hat keine ganzzahligen Koeffizienten, wenn man es in den p_λ ausdrückt.

Bemerkung. Die Involution ω vertauscht $E(t)$ und $H(t)$, daher folgt aus (3.5.1) und aus (3.5.2)

$$\omega(p_n) = (-1)^{n-1} p_n$$

für jedes $n \geq 1$. Damit ergibt sich für jede Partition λ die Gleichung

$$\omega(p_\lambda) = \varepsilon_\lambda \, p_\lambda \tag{3.5.5}$$

mit $\varepsilon_\lambda := (-1)^{|\lambda| - l(\lambda)}$.

Als letztes in diesem Abschnitt werden wir nun noch h_n und e_n als Linearkombinationen der p_λ ausdrücken. Für eine beliebige Partition λ sei

$$z_\lambda := \prod_{i \geq 1} i^{m_i} m_i!$$

(Zur Erinnerung: m_i ist die Anzahl Teile in λ, die gleich i sind).

Lemma 3.6. *Mit diesen Notationen hat man*

$$\begin{aligned} H(t) &= \sum_{\lambda} z_\lambda^{-1} p_\lambda t^{|\lambda|} \\ E(t) &= \sum_{\lambda} \varepsilon_\lambda\, z_\lambda^{-1} p_\lambda t^{|\lambda|}\,, \end{aligned} \tag{3.5.6}$$

oder, äquivalent dazu,

$$\begin{aligned} h_n = &\quad \textstyle\sum_{|\lambda|=n} z_\lambda^{-1} p_\lambda \\ e_n = &\quad \textstyle\sum_{|\lambda|=n} \varepsilon_\lambda\, z_\lambda^{-1} p_\lambda\,. \end{aligned} \tag{3.5.7}$$

Beweis. Es genügt, die Gleichungen (3.5.6) zu zeigen, die Gleichungen (3.5.7) beiden folgen dann, indem man die Involution ω anwendet und (3.5.5).

Aus (3.5.1) haben wir

$$\begin{aligned} H(t) &= \exp \sum_{r\geq 1} p_r t^r/r \\ &= \prod_{r\geq 1} \exp(p_r t^r/r) \\ &= \prod_{r\geq 1} \sum_{m_r=0}^{\infty} (p_r t^r)^{m_r}/r^{m_r} m_r! \\ &= z_\lambda^{-1} p_\lambda t^{|\lambda|} \end{aligned}$$

□

3.6 Beispiele

In diesem Abschnitt betrachten wir einige Beispiele mit konkreten Werten für die x_i.

Beispiel 3. (a) Es seien $x_1 = \cdots = x_n = 1$ und $x_{n+1} = x_{n+2} = \cdots = 0$. Dann ist $E(t) = (1+t)^n$ und $H(t) = (1-t)^{-n}$. Damit ist

$$e_r = \binom{n}{r}, \quad h_r = \binom{n+r-1}{r}$$

und $p_r = n$ für alle $n \geq 1$. Ausserdem ist

$$m_\lambda = u_\lambda \binom{n}{l(\lambda)}$$

für

$$u_\lambda := \frac{l(\lambda)!}{\prod_{i\geq 1} m_i(\lambda)!}$$

(b) Sei allgemeiner X eine Variable und sei $\varepsilon_X : \Lambda_{\mathbb{Q}} \to \mathbb{Q}[X]$ definiert durch $\varepsilon_X(p_r) = X$ für alle $r \geq 1$. Dann ist

$$\varepsilon_X(e_r) = \binom{X}{r}, \quad \varepsilon_X(h_r) = \binom{X+r-1}{r} = (-1)^r \binom{-X}{r}$$

für alle $r \geq 1$ und

$$\varepsilon_X(m_\lambda) = u_\lambda \binom{X}{l(\lambda)}$$

Begründung: diese Formeln sind nach Teil (a) korrekt, wenn man X durch eine Zahl $n > 0$ ersetzt. Daher gelten sie.

Eventuell auch dieses Beispiel:

Beispiel 4. Seien $x_i := \frac{1}{n}$ für $1 \leq i \leq n$ und $x_i = 0$ für $i > n$. Nun betrachten wir, was unter $n \to \infty$ passiert. Aus Beispiel 3 wissen wir, dass

$$e_r = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n-r} \binom{n}{r} = \frac{1}{r!}$$

gilt, und ähnlich ist $h_r = \frac{1}{r!}$, also $E(t) = H(t) = e^t$. Ausserdem ist $p_1 = 1$ und $p_r = 0$ für $r > 1$. Es ist $m_\lambda = 0$ für alle Partitionen λ ausser für $\lambda = (1^r)$ $(r \geq 0)$.

Beispiel 5. Seien $x_i = q^{i-1}$ für $1 \leq i \leq n$, q eine Variable, sei $x_i = 0$ für $i > n$. Dann gilt

$$E(t) = \prod_{i=0}^{n-1}(1+qt) = \sum_{r=0}^{n} q^{r(r-1)/2} \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} t^r$$

wobei $\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}$ die Abkürzung für den q-Binomialkoeffizient sei:

$$\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} := \frac{(1-q^n)(1-q^{n-1})\cdots(1-q^{n-r+1})}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^r)}$$

Und es ist

$$H(t) = \prod_{i=0}^{n-1}(1-qt)^{-1} = \sum_{r=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n+r-1 \\ r \end{bmatrix} .$$

Dies kann man mit Induktion über n zeigen. Daraus folgt

$$e_r = q^{r(r-1)/2} \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}, \quad h_r = \begin{bmatrix} n+r-1 \\ r \end{bmatrix} .$$

h_r ist die erzeugende Funktion für Partitionen λ mit $l(\lambda) \leq r$ und $l(\lambda') \leq n-1$, e_r ist die erzeugende Funktion für Partitionen, deren Teile alle verschieden sind.

4 Schurfunktionen

Für den Anfang nehmen wir an, dass wir endlich viele Variablen haben, $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Wir schreiben x^α für das Monom $x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$. Aus x^α erhält man durch "Antisymmetrisierung" ein Polynom a_α wie folgt:

$$a_\alpha = a_\alpha(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{w \in S_n} \varepsilon(w) w(x^\alpha)$$

wobei $\varepsilon(w)$ das Vorzeichen der Permutation w ist, $\varepsilon(w) = \pm 1$[6].

Das Polynom a_α ist schief-symmetrisch, d.h. es gilt

$$w(a_\alpha) = \varepsilon(w) a_\alpha$$

für jedes $w \in S_n$. Insbesondere ist daher $a_\alpha = 0$ ausser wenn die $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ alle verschieden sind. Wir können also (für $a_\alpha \neq 0$) annehmen, dass wir $\alpha_1 > \alpha_2 > \ldots \alpha_n \geq 0$ haben und damit $\alpha = \lambda + \delta$ schreiben, wobei λ eine Partition der Länge $\leq n$ ist und für $\delta = (n-1, n-2, \ldots, 1, 0)$ aus Abschnitt 2.6. Damit haben wir

$$a_\alpha = a_{\lambda+\delta} = \sum_w \varepsilon(w) w(x^{\lambda+\delta}),$$

was als eine Determinante geschrieben werden kann:

$$a_{\lambda+\delta} = \det(x_i^{\lambda_j + n - j})_{1 \leq i,j \leq n}.$$

Diese Determinante lässt sich in $\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$ durch jede Diferenz $x_i - x_j$ teilen ($1 \leq i < j \leq n$), also auch durch ihr Produkt, die sogenannte *Vandermondesche Determinante*

$$\prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j) = \det(x_i^{n-1}) = a_\delta.$$

Also ist $a_{\lambda+\delta}$ in $\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$ durch a_δ teilbar und der Quotient

$$s_\lambda := s_\lambda(x_1, \ldots, x_n) := a_{\lambda+\delta}/a_\delta \tag{4.0.1}$$

ist symmetrisch, liegt also in Λ_n. Der Quotient s_λ heisst *Schurfunktion in den Variablen* $x_1, \ldots, x_n$ *zur Partition* λ (für $l(\lambda) \leq n$), s_λ ist homogen vom Grad $|\lambda|$.

Bemerkung. Die Definition in (4.0.1) macht für jedes $\lambda \in \mathbb{Z}^n$ sinn, für das $\lambda + \delta$ keine negativen Einträge hat. Sei also $\lambda \in \mathbb{Z}^n$ so ein Vektor. Sind die Zahlen $\lambda_i + n - i$ nicht alle verschieden ($1 \leq i \leq n$), so ist $s_\lambda = 0$. Sind sie alle verschieden, so ist $\lambda + \delta = w(\mu + \delta)$ für ein $w \in S_n$ und eine Partition μ. Dann ist $s_\lambda = \varepsilon(w) s_\mu$.

[6]jede Permutation w kann ja durch eine Anzahl von Transpositionen geschrieben werden. Ist diese Anzahl gerade, so ist das *Vorzeichen* $\varepsilon(w)$ *von* w gleich 1, andernfalls ist $\varepsilon(w) = -1$.

Lemma 4.1. *Die Schurfunktionen $s_\lambda(x_1, \dots, x_n)$ mit $l(\lambda) \leq n$ bilden eine $\mathbb{Z}$-Basis von Λ_n.*

Beweis. Die Polynome $a_{\lambda+\delta}$ mit $l(\lambda) \leq n$ bilden eine Basis von (dem $\mathbb{Z}$-Modul) A_n, der Menge aller schief-symmetrische Polynome in $x_1, \dots, x_n$. Multiplikation mit a_δ liefert einen Isomorphismus von Λ_n nach A_n (A_n ist der freie Λ_n-Modul, der durch a_δ erzeugt wird). Das liefert das Resultat. □

Nun betrachten wir, was passiert, wenn wir die Anzahl der Variablen erhöhen:

Lemma 4.2. *Die s_λ bilden eine $\mathbb{Z}$-Basis von Λ und für jedes $k \geq 0$ sind die s_λ mit $|\lambda| = k$ eine $\mathbb{Z}$-Basis von Λ^k.*

Beweis. Ist $l(\alpha) \leq n$, so gilt $a_\alpha(x_1, \dots, x_n, 0) = a_\alpha(x_1, \dots, x_n)$. Damit hat man

$$\rho_{n+1,n}(s_\lambda(x_1, \dots, x_{n+1})) = s_\lambda(x_1, \dots, x_n)$$

(mit $\rho_{n+1,n}$ aus Abschnitt 3.2). Daraus folgt, dass unter $n \to \infty$ die Polynome $s_\lambda(x_1, \dots, x_n)$ für jede Partition λ ein eindeutiges Element $s_\lambda \in \Lambda$ definieren. Dieses ist homogen ist vom Grad $|\lambda|$. Lemma 4.1 gibt dann das Resultat. □

Mit den Sätzen 3.2 und 3.3 sieht man, dass man jede Schurfunktion s_λ als Polynom in den elementarsymmetrischen Funktionen e_r bzw. als Polynom in den vollständigen symmetrischen Funktionen h_r ausdrücken kann. Die Formeln sind

$$s_\lambda = \det(h_{\lambda_i - i + j})_{1 \leq i,j \leq n} \tag{4.0.2}$$

für $n \geq l(\lambda)$ und

$$s_\lambda = \det(e_{\lambda'_i - i + j})_{1 \leq i,j \leq m} \tag{4.0.3}$$

für $m \geq l(\lambda')$. Das wird im Buch bewiesen ([M98], Seiten 41,42).

Bemerkung. 1. Dank den Formeln (4.0.2) und (4.0.3) gilt

$$w(s_\lambda) = s_{\lambda'} \tag{4.0.4}$$

für jede Partition λ.

2. Insbesondere liefern die beiden genannten Formeln

$$s_{(n)} = h_n \quad s_{(1^n)} = e_n \, .$$

3. Schliesslich kann man die Schurfunktionen auch mittels h_λ und den Erhöhungsoperatoren R_{ij} ausdrücken:

$$s_\lambda = \prod_{i<j} (1 - R_{ij}) h_\lambda \, ,$$

dabei steht für einen beliebigen Erhöhungsoperator R die Notation Rh_λ einfach für $h_{R\lambda}$. Diese Umformulierung wird in [M98] auf Seite 43 bewiesen.

Approximately: 11. Woche

4.1 Beispiele

Beispiel 6. Seien $x_i = q^{i-1}$ $(1 \le i \le n)$ wie in Beispiel 5. Ist λ eine Partition der Länge $\le n$, so gilt

$$a_{\lambda+\delta} = \det(g^{(i-1)(\lambda_j+n-j)})_{1 \le i,j \le n} \,.$$

Das ist eine Vandermondesche Determinante in den Variablen q^{λ_m+n-j} (für $1 \le j \le n$), womit

$$\begin{aligned} a_{\lambda+\delta} &= \prod_{i<j}(q^{\lambda_j+n-j} - q^{\lambda_i+n-i}) \\ &= q^{n(\lambda)+n(n-1)(n-2)/6} \prod_{i<j}(1 - q^{\lambda_i-\lambda_j-i+j}) \end{aligned}$$

gilt. Dies ist, nach Beispiel 2 gleich dem Ausdruck

$$\frac{q^{n(\lambda)+n(n-1)(n-2)/6} \prod_{i \ge 1} \varphi_{\lambda_i+n-i}(q)}{\prod_{x \in \lambda}(1 - q^{h(x)})}$$

wobei $h(x)$ die Hakenlänge von $x \in \lambda$ ist und $\varphi_r(q) := (1-q)\cdots(1-q^r)$. Mit Übung 8 gibt dies

$$s_\lambda = a_{\lambda+\delta}/a_\delta = q^{n(\lambda)} \prod_{x \in \lambda} \frac{1 - q^{n+c(x)}}{1 - q^{h(x)}}$$

wobei $c(x)$ der Inhalt von $x \in \lambda$ ist (siehe Definition vor Übung 8).

Wir definieren nun für jede Partition λ ein Polynom $\begin{bmatrix} n \\ \lambda \end{bmatrix}$, das im Fall $\lambda = (r)$ gleich dem q-Binomialquotienten $\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}$ ist aus Beispiel 5 (Abschnitt 3.6):

$$\begin{bmatrix} n \\ \lambda \end{bmatrix} := \prod_{x \in \lambda} \frac{1 - q^{n-c(x)}}{1 - q^{h(x)}} \,.$$

Damit erhält man

$$s_\lambda(1, q, \ldots, q^{n-1}) = q^{n(\lambda)} \begin{bmatrix} n \\ \lambda' \end{bmatrix} \,.$$

$\begin{bmatrix} n \\ \lambda \end{bmatrix}$ ist ein Polynom in q vom Grad

$$d = \sum_{x \in \lambda}(n - c(x) - h(x)) = \sum_{i=1}^{n}(n + 1 - 2i)\lambda_i'$$

(nach Übungen 7 und 8 (Abschnitt 2.7). Ist a_i der Koeffizient von q^i in $\begin{bmatrix} n \\ \lambda \end{bmatrix}$, für $1 \le i \le n$, dann gilt $a_i = a_{d-i}$. Man kann zeigen, dass folgendes gilt: $a_0 \le a_1 \le \cdots \le a_{[d/2]}$, siehe [M98, §8, Example 4]. Mit Hilfe der Formel (4.0.3) kann man $\begin{bmatrix} n \\ \lambda \end{bmatrix}$ als Determinante in den q-Binomialkoeffizienten $\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}$ ausdrücken.

Beispiel 7. Wir betrachten den Übergang $n \to \infty$ aus Beispiel 6,

Aus Beispiel 6 haben wir

$$s_\lambda = q^{n(\lambda)}$$

wobei $H_\lambda(q)$ das *Hakenpolynom* $\prod_{x \in \lambda}(1 - q^{h(x)})$ ist.

Im letzten Beispiel von diesem Kapitel betrachten wir Zusammenhänge zwischen den symmetrischen Polynomen.

check notations!!

Beispiel 8. Man beobachtet zuerst folgendes: es gilt

$$\begin{aligned} s_{(1,1)} &= e_{(2,0)} = h_1^2 - h_2 \\ s_{(2,0)} &= h_{(2,0)} = e_1^2 - e_2 \\ s_{(1,0)} \cdot s_{(1,0)} &= s_{(1,1)} + s_{(2,0)}\,. \end{aligned}$$

Dies sind Spezialfälle einiger wichtiger Formeln für Schurpolynome (Schurfunktionen in endlich vielen Variablen).

Die ersten beiden sind bekannt als *Determinantenformeln* (die erstere heisst auch *Jacobi-Trudi-Identität*, die erste und zweite sind auch bekannt als die Formeln von *Giambelli*), die dritte heisst *Pieri-Formel*. Sei $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$.

$$s_\lambda = |h_{\lambda_i} + j - i| = \begin{vmatrix} h_{\lambda_1} & h_{\lambda_1+1} & \ldots & h_{\lambda_1+k-1} \\ h_{\lambda_2-1} & h_{\lambda_2} & \ldots & \\ \vdots & & \ddots & \\ h_{\lambda_k-k+1} & & \ldots & h_{\lambda_k}\,. \end{vmatrix}$$

Ist $\lambda_{p+1} = \cdots = \lambda_k = 0$, so ist die Determinante auf der rechten Seite gleich der Determinante der oberen linken Ecke aus den ersten p Zeilen und p Spalten. Die zweite Formel:

$$s_\lambda = |e_{\lambda'_i} + j - i| = \begin{vmatrix} e_{\lambda'_1} & e_{\lambda'_1+1} & \ldots & e_{\lambda'_1+l-1} \\ e_{\lambda'_2-1} & e_{\lambda'_2} & \ldots & \\ \vdots & & \ddots & \\ e_{\lambda'_l-l+1} & & \ldots & e_{\lambda'_l}\,, \end{vmatrix}$$

wobei $\lambda' = (\lambda'_1, \ldots, \lambda'_l)$ die konjugierte Partition von λ ist. Die Formel von Pieri erklärt, wie man ein Schurpolynom s_λ mit einem Schurpolynom $s_{(m)} = h_m$ multipliziert:

$$s_\lambda s_{(m)} = \sum s_\nu\,,$$

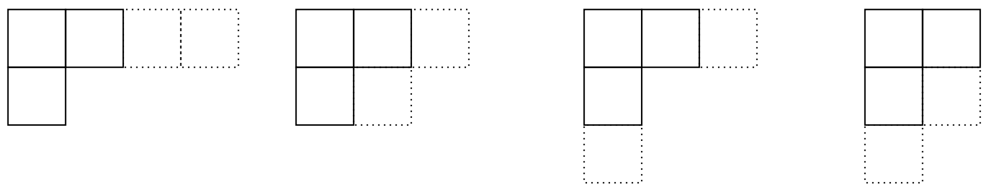
wobei ν über alle Diagramme läuft, die man aus dem Diagramm von λ erhält, indem man m Boxen an die Zeilen von λ anfügt, unter der Bedingung, dass keine zwei davon in der gleichen Spalte liegen. Mit anderen Worten: die Summe läuft über alle $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_k)$ mit

$$\nu_1 \geq \lambda_1 \geq \nu_2 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \nu_k \geq \lambda_k \geq 0$$

mit $\sum \nu_i = \sum \lambda_i + m$. Als Beispiel: man findet

$$s_{(2,1)} \cdot s_{(2)} = s_{(4,1)} + s_{(3,2)} + s_{(3,1,1)} + s_{(2,2,1)}$$

durch die Diagramme:



Die Formel von Pieri und die Determinantenformeln kann man benutzen, um zwei beliebige Schurpolynome zu multiplizieren. Es gibt jedoch keine direkte Formel, die diejenige von Pieri verallgemeinert. Hier hilft die *Regel von Littelwood-Richardson* weiter, die eine kombinatorische Formel für die Koffezienten $n_{\lambda\mu\nu}$ im Produkt $s_\lambda s_\mu = \sum_\nu n_{\lambda\mu\nu} s_\nu$ gibt.

Die Beweise der Formeln sind in [FH91] zu finden, Appendix A.

5 Orthogonalität

In diesem Abschnitt betrachten wir, wie sich symmetrische Funktionen in zwei verschiedene Folgen von Variablen zueinander verhalten. Seien $x = (x_1, x_2, \dots)$ und $y = (y_1, y_2, \dots)$ zwei endliche oder unendliche Folgen von (unabhängigen) Variablen. Wir werden die symmetrischen Funktionen in den x mit $s_\lambda(x)$, $p_\lambda(x)$, etc. bezeichnen und diejenigen in den y mit $s_\lambda(y)$, $p_\lambda(y)$, etc. .

Wir werden drei Reihenentwicklungen für das Produkt

$$\prod_{i,j} (1 - x_i y_i)^{-1}$$

angeben. Die erste ist

Lemma 5.1. *Es gilt*

$$\prod_{i,j} (1 - x_i y_i)^{-1} = \sum_\lambda z_\lambda^{-1} p_\lambda(x) p_\lambda(y) \,,$$

wobei die Summe über alle Partitionen λ läuft.

Beweis. Dies folgt aus (3.5.6) angewendet auf die Variablen $x_i y_j$. □

Lemma 5.2. *Es ist*

$$\prod_{i,j} (1 - x_i y_i)^{-1} = \sum_\lambda h_\lambda(x) m_\lambda(y) = \sum_\lambda m_\lambda(x) h_\lambda(y)$$

(Summation über alle Partitionen λ).

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned}\prod_{i,j}(1-x_iy_i)^{-1} &= \prod_j H(y_j)\\ &= \prod_j \sum_{r=0}^{\infty} h_r(x)y_j^r\\ &= \sum_\alpha h_\alpha(x)y^\alpha\\ &= \sum_\lambda h_\lambda(x)m_\lambda(y)\,,\end{aligned}$$

wobei die α Folgen $(\alpha_1, \alpha_2, \dots)$ von Zahlen $\alpha_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ sind mit $\sum \alpha_i < \infty$ und die λ beliebige Partitionen. $\square$

Die dritte Gleichheit ist

Lemma 5.3.

$$\prod_{i,j}(1-x_iy_i)^{-1} = \sum_\lambda s_\lambda(x)s_\lambda(y)\,,$$

wobei die Summe über alle Partitionen λ läuft.

Beweis. Dies ist eine Folge von Lemma 5.2 und der Identität

$$a_\alpha = a_\delta \sum_{w\in S_n} \varepsilon(w)h_{\alpha - w\delta}$$

(für $\alpha \in \mathbb{N}^n$) aus [M98, (3.7'), Seite 42]: Seien $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ und $y = (y_1, y_2, \dot{;} y_n)$ zwei endliche Mengen von Variablen, sei $\delta = (n-1, n-2, \dots, 0)$ wie üblich. Dann liefert Lemma 5.2

$$a_\delta(x)a_\delta(y)\prod_{i,j=1}^{n}(1-x_iy_j)^{-1} = a_\delta(x)\sum_{\alpha,w} h_\alpha(x)\,\varepsilon(w)y^{\alpha+w\delta} \tag{5.0.1}$$

summiert über alle $\alpha \in \mathbb{N}^n$ und $w \in S_n$, und das ist

$$\begin{aligned}&= a_\delta(x)\sum_{\beta,w}\varepsilon(w)h_{\beta-w\delta}(x)y^\beta\\ &= \sum_\beta a_\beta(x)y^\beta\end{aligned}$$

nach der Identität (3.7') aus [M98], siehe oben. Da gilt $a_{w\beta} = \varepsilon(w)a_\beta$, folgt, dass die letzte Summe gleich $\sum a_\gamma(x)a_\gamma(y)$ ist, summiert über alle γ mit $\gamma_1 \geq \gamma_2 \geq \dots \geq \gamma_n \geq 0$, also gleich

$$\sum_\lambda a_{\lambda+\delta}(x)a_{\lambda+\delta}(y)$$

(Summe über alle Partitionen λ der Länge $\leq n$). Das liefert das Resultat für n Variablen x_i und n Variablen y_i. Der Rest folgt dann mittels $n \to \infty$. $\square$

Approximately: 12. Woche

5.1 Skalarprodukt auf Λ

Nun führen wir ein Skalarprodukt ein auf Λ, d.h. eine $\mathbb{Z}$-wertige Bilinearform $\langle u, v\rangle$, indem wir verlangen, dass die Basen (h_λ) und (m_λ) dual zueinander sind.

Definition. Wir definieren eine $\mathbb{Z}$-wertige Bilinearform $\langle u, v\rangle$ auf Λ durch die Vorschrift

$$\langle h_\lambda, m_\mu\rangle = \delta_{\lambda\mu}$$

für alle Partitionen λ, μ (dabei ist $\delta_{\lambda\mu}$ das Kroneckerdelta).

Dann haben wir folgendes

Satz 5.4. *Für jedes $n \geq 0$ seien (u_λ) und (v_λ) $\mathbb{Q}$-Basen von $\Lambda^n_{\mathbb{Q}}$, die mit Partitionen λ von n beschriftet sind. Dann sind äquivalent:*

(a) Es ist $\langle u_\lambda, u_\mu\rangle = \delta_{\lambda\mu}$ für alle λ, μ;

(b) Es gilt $\sum_\lambda u_\lambda(x)v_\lambda(y) = \prod_{i,j}(1 - x_i y_j)^{-1}$.

Beweis. □

Satz 5.4 und Lemma 5.1 liefern nun

$$\langle p_\lambda, p_\mu\rangle = \delta_{\lambda\mu} z_\lambda\,, \tag{5.1.1}$$

die p_λ bilden also eine Orthonormalbasis von $\Lambda_{\mathbb{Q}}$. Analog liefern Satz 5.4 und Lemma 5.3

$$\langle s_\lambda, s_\mu\rangle = \delta_{\lambda\mu}\,, \tag{5.1.2}$$

also bilden die s_λ eine Orthonormalbasis von Λ und die s_λ mit $|\lambda| = n$ eine Orthonormalbasis von Λ^n.

Bemerkung. Jede andere Orthonormalbasis von Λ^n erhält man dann aus der Basis (s_λ) durch Transformation mittels einer orthogonalen ganzzahligen Matrix. The einzigen solchen Matrizen sind die Permutationsmatrizen mit Vorzeichen. Daher charakterisiert (5.1.2) die s_λ bis auf Reihenfolge und Vorzeichen.

Die Bilinearform hat die folgenden Eigenschaften

Lemma 5.5. *Die Bilinearform $\langle u, v\rangle$ ist symmetrisch und positiv definit.*

(Das folgt aus Gleichung (5.1.1) oder aus Gleichung (5.1.2).)

Und

Lemma 5.6. *Die Involution ω ist eine Isometrie, d.h. $\langle \omega u, \omega v\rangle = \langle u, v\rangle$ für alle u, v.*

Beweis. Aus (3.5.5) hat man $\omega(p_\lambda) = \pm p_\lambda$, und damit liefert (5.1.1)

$$\langle \omega(p_\lambda), \omega(p_\mu) \rangle = \langle p_\lambda, p_\mu \rangle\,,$$

was die Behauptung zeigt, da die p_λ eine $\mathbb{Q}$-basis von $\Lambda_\mathbb{Q}$ bilden. □

Eine weitere Beobachtung: Lemma 5.6 und die Definition von $\langle\ ,\ \rangle$ (mittels der Dualität der Basen (h_λ) und (m_λ) liefern ausserdem

$$\langle e_\lambda, f_\mu \rangle = \delta_{\lambda\mu}$$

für die Funktionen $f_\mu = \omega(m_\mu)$, d.h. die (e_λ) und die (f_λ) sind zueinander duale Basen von Λ.

Bemerkung. Indem wir die Involution ω auf die symmetrischen Funktionen in den x anwenden, erhalten wir aus Lemmata 5.1, 5.2 und 5.3 drei Reihenentwicklungen für das Produkt $\prod_{i,j}(1 + x_i y_j)$:

(a) $\prod_{i,j}(1 + x_i y_j) = \sum_\lambda \varepsilon_\lambda\, z_\lambda^{-1} p_\lambda(x) p_\lambda(y)$

(b) $\prod_{i,j}(1 + x_i y_j) = \sum_\lambda m_\lambda(x) e_\lambda(y) = \sum_\lambda e_\lambda(x) m_\lambda(y)$

(c) $\prod_{i,j}(1 + x_i y_j) = \sum_\lambda s_\lambda(x) s_{\lambda'}(y)$

wobei bei letzterem die Gleichung (4.0.4) benutzt wird.

5.2 Beispiele

Beispiel 9. Setzen wir $y_1 = y_2 = \cdots = y_n = t$ und $y_{n+1} = y_{n+2} = \cdots = 0$ in (c) aus der Bemerkung am Ende von Abschnitt 5.1, so erhalten wir

$$\begin{aligned} E(t)^n &= \sum_\lambda s_\lambda(x) s_{\lambda'}(y) \\ &= \sum_\lambda \binom{n}{\lambda} s_\lambda(x) t^{|\lambda|} \end{aligned}$$

für $\binom{n}{\lambda} := \prod_{x\in\lambda} \frac{n - c(x)}{h(x)}$ und allgemeiner, für beliebige ganzzahlige X, $\binom{X}{\lambda} := \prod_{x\in\lambda} \frac{X-c(x)}{h(x)}$. Auf beiden Seiten sind die Koeffizienten der Potenzen von t Polynome in n (mit Koeffizienten in Λ), die gleich sind für alle positiven ganzzahligen Werte von n, also sind sie identisch gleich. Daher erhalten wir

$$E(t)^X = \sum_\lambda \binom{X}{\lambda} s_\lambda t^{|\lambda|}$$

für alle X, und, indem man X und t durch $-X$ bzw.durch $-t$ ersetzt, erhält man

$$H(t)^X = \sum_\lambda \binom{X}{\lambda'} s_\lambda t^{|\lambda|}\,.$$

Diese Gleichungen verallgemeinern den Binomialsatz.

Beispiel 10. Aus (3.5.7) und (5.1.1) erhalten wir

$$\langle h_n, p_\lambda \rangle = 1$$

für jede Partition λ von n. Dual dazu gilt

$$\langle e_n, p_\lambda \rangle = \varepsilon_\lambda \ .$$

6 Schiefe Schurfunktionen

In diesem Kapitel defnieren wir symmetrische Funktionen zu Schiefdiagrammen.

Jede symmetrische Funktion $f \in \Lambda$ ist eindeutig bestimmt durch ihr Skalarprodukt mit den s_λ, es ist nämlich

$$f = \sum_\lambda \langle f, s_\lambda \rangle s_\lambda \,,$$

da die s_λ eine Orthonormalbasis von Λ bilden (siehe (5.1.2)).

Definition. Seien λ und μ Partitionen. Wir definieren eine symmetrische Funktion $s_{\lambda/\mu}$ durch die Vorschrift

$$\langle s_{\lambda/\mu}, s_\nu \rangle = \langle s_\lambda, s_\mu s_\nu \rangle$$

für alle Partitionen ν. Die Funktionen $s_{\lambda/\mu}$ heissen die *schiefen Schurfunktionen.*

Äquivalent dazu kann man die schiefen Schurfunktionen wie folgt erhalten: man definiert Zahlen $c^\lambda_{\mu\nu}$ durch

$$s_\mu s_\nu = \sum_\lambda c^\lambda_{\mu\nu} s_\lambda \,, \tag{6.0.1}$$

dann hat man

$$s_{\lambda/\mu} = \sum_\nu c^\lambda_{\mu\nu} s_\nu \,. \tag{6.0.2}$$

Bemerkung. Es ist klar, dass $s_{\lambda/0} = s_\lambda$ ist, wobei 0 die Null-Partition sei. Ausserdem ist $c^\lambda_{\mu\nu} = 0$, falls $\lambda \neq \mu + \nu$ ist. Die Funktion $s_{\lambda/\mu}$ ist homogen vom Grad $|\lambda| - |\mu|$ und ist 0 für $|\lambda| < |\mu|$. Wir werden weiter unten sehen, dass $s_{\lambda/\mu} = 0$ ist, ausser im Fall $\lambda \supset \mu$.

Es seien nun $x = (x_1, x_2, \dots)$ und $y = (y_1, y_2, \dots)$ zwei Mengen von Variablen. Dann gilt

$$\begin{aligned} \sum_\lambda s_{\lambda/\mu}(x) s_\lambda(y) &= \sum_{\lambda,\nu} c^\lambda_{\mu,\nu} s_\nu(x) s_\lambda(y) \\ &= \sum_\nu s_\nu(x) s_\mu(y) s_\nu(y) \end{aligned}$$

dank (6.0.1) und (6.0.2). Daraus erhält man

$$\sum_\lambda s_{\lambda/\mu}(x) s_\lambda(y) = s_\mu(y) \sum_\nu h_\nu(x) m_\nu(y)$$

mit den Lemmata 5.2 und 5.3. Nehmen wir nun an, dass $y = (y_1, \ldots, y_n)$ ist, so sind die obigen Summen gültig für Partitionen λ und ν der Länge $\leq n$. Die vorherige (?) Gleichung kann dann umgeschrieben werden zu

$$\begin{aligned} \sum_\lambda s_{\lambda/\mu}(x) a_{\lambda+\delta}(y) &= \sum_\nu h_\nu(x) m_\mu(y) a_{\mu+\delta}(y) \\ &= \sum_\alpha h_\alpha(x) \sum_{w \in S_n} \varepsilon(w) y^{\alpha + w(\mu+\delta)} , \end{aligned}$$

wobei über $\alpha \in \mathbb{N}^n$ summiert wird. Damit ist $s_{\lambda/\mu}(x)$ gleich dem Koeffizienten von $y^{\lambda+\delta}$ in dieser Summe, d.h. wir haben

$$s_{\lambda/\mu} = \sum_{w \in S_n} \varepsilon(w) h_{\lambda+\delta-w(\mu+\delta)} ,$$

dabei benutzt man die Konvention, dass $h_\alpha = 0$ ist, falls einer der Einträge α_i von α negativ ist. Diese Formel kann man auch als Determinante schreiben, nämlich

$$s_{\lambda/\mu} = \det(h_{\lambda_i - \mu_j - i + j})_{1 \leq i,j \leq n} , \tag{6.0.3}$$

wobei $n \geq l(\lambda)$ ist.

Bemerkung. Ist $\mu = 0$, so wird aus (6.0.3) die Formel (4.0.2).

Approximately: 13. Woche

Satz 6.1. *Die schiefe Schurfunktion $s_{\lambda/\mu}$ ist 0, ausser für $\lambda \supset \mu$. In diesem Fall hängt $s_{\lambda/\mu}$ nur vom Schiefdiagramm $\lambda - \mu$ ab. Sind θ_i die Komponenten von $\lambda - \mu$, so ist $s_{\lambda/\mu} = \prod_i s_{\theta_i}$.*

Beweis. Aus (6.0.3) und der Formel (3.4.3) erhält man

$$s_{\lambda/\mu} = \det(e_{\lambda'_i - \mu'_j - i + j})_{1 \leq i,j \leq m}$$

mit $m \geq l(\lambda')$, und daraus

$$\omega(s_{\lambda/\mu}) = s_{\lambda'/\mu'} .$$

Nach (6.0.3) ist $s_{\lambda/\mu} = 0$, ausser wenn $\lambda_i \geq \mu_i$ gilt für alle i, d.h. ausser wenn $\lambda \supset \mu$ gilt: ist nämlich $\lambda_r < \mu_r$ für ein r, dann ist $\lambda_i \leq \lambda_r < \mu_r \leq \mu_j$ für $1 \leq j \leq r \leq i \leq n$ und damit $\lambda_i - \mu_j - i + j < 0$ für diese Werte von i und j.

Folglich hat die Matrix $(h_{\lambda_i - \mu_j - i + j})$ einen Block der Grösse $(n - r + 1) \times r$ von Nullen in der Ecke unten links und damit verschwindet ihre Determinante.

Aus den gleichen Überlegungen folgt, falls $\lambda \supset \mu$ und falls $\mu_r \geq \lambda_{r+1}$ gilt für ein $r < n$, dass die Matrix $(h_{\lambda_i - \mu_j - i + j})$ die Gestalt $\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ mit einer $r \rtimes r$-Matrix A, B einer $n - r \times n - r$-Matrix. Ihre Determinante ist gleich $\det A \cdot \det B$. Besteht das Schiefdiagramm $\lambda - \mu$ aus zwei disjunkten Teilen θ, φ (beides Schiefdiagramme), dann ist $s_{\lambda/\mu} = s_\theta \cdot s_\varphi$. ☐

Ist die Anzahl der x endlich, so kann man noch mehr sagen:

Lemma 6.2. *Es ist $s_{\lambda/\mu}(x_1, \dots, x_n) = 0$, ausser falls $0 \le \lambda_i' - \mu_i' \le n$ gilt für alle $i \ge 1$.*

Beweis. Wir nehmen an, dass ein $r \ge 1$ existiert mit $\lambda_r' - \mu_r' > n$. Wegen $e_{n+1} = e_{n+2} = \dots = 0$ folgt wie im Beweis von 6.1, dass die Matrix $(e_{\lambda_i' - \mu_j' - i + j})$ einen rechteckigen Block von Nullen in der Ecke oben rechts hat, wobei eine Ecke dieses Rechtecks auf der Hauptdiagonalen liegt, also ist die Determinante dieser Matrix $= 0$. □

Notation. Sind $x = (x_1, x_2, \dots)$ und $y = (y_1, y_2, \dots)$ zwei Mengen von Variablen, so schreiben wir $s_\lambda(x, y)$ für die Schurfunktion zu λ in den Variablen $(x_1, x_2, \dots, y_1, y_2, \dots)$, bzw. $s_{\lambda/\mu}(x, y)$ für die schiefe Schurfunktion $s_{\lambda/\mu}$ in den Variablen $(x_1, x_2, \dots, y_1, y_2, \dots)$.

Satz 6.3. *Es gilt*

$$s_{\lambda/\mu}(x, y) = \sum_\nu s_{\lambda/\nu}(x) s_{\nu/\mu}(y)\,,$$

summiert über alle Partitionen ν, die $\lambda \supset \nu \supset \mu$ erfüllen.

Beweis. Um dies zu zeigen, zeigt man zuerst, dass für die Schurfunktion $s_\lambda(x, y)$ zu λ in den Variablen $(x_1, x_2, \dots, y_1, y_2, \dots)$ Folgendes gilt:

$$\begin{aligned} s_\lambda(x, y) &= \sum_\mu s_{\lambda/\mu}(x) s_\mu(y) \\ &= \sum_{\mu,\nu} c^\lambda_{\mu\nu}(y) s_\nu(x)\,. \end{aligned} \tag{6.0.4}$$

Dazu seien $x = (x_1, x_2, \dots)$, $y = (y_1, y_2, \dots)$ und $z = (z_1, z_2, \dots)$ drei Mengen von Variablen. Nach (6.0.1) folgt, dass

$$(a) \qquad \sum_{\lambda,\mu} s_{\lambda/\mu}(x) s_\lambda(z) s_\mu(y) = \sum_\mu s_\mu(y) s_\mu(z) \cdot \prod_{i,k} (1 - x_i z_k)^{-1}$$

gilt und dies ist nach Lemma 5.3 dasselbe wie

$$\prod_{i,k} (1 - x_i z_k)^{-1} \cdot \prod_{j,k} (1 - y_j z_k)^{-1}\,,$$

also gleich

$$(b) \qquad \sum_\lambda s_\lambda(x, y) s_\lambda(z)$$

Daraus, dass (a) gleich (b) ist, folgt nun die Behauptung (6.0.4)[7]:

$$\begin{aligned} s_\lambda(x, y) &= \sum_\mu s_{\lambda/\mu}(x) s_\mu(y) \\ &= \sum_{\mu,\nu} c^\lambda_{\mu\nu} s_\mu(y) s_\nu(x)\,. \end{aligned}$$

[7]mit Hilfe von (6.0.2).

Nun wendet man (6.0.4) zweimal an und erhält:

$$\begin{aligned}\sum_\mu s_{\lambda/\mu}(x,y)s_\mu(z) &= s_\lambda(x,y,z)\\ &= \sum_\nu s_{\lambda/\nu}(x)s_\nu(y,z)\\ &= \sum_{\mu,\nu} s_{\lambda/\nu}(x)s_{\nu/\mu}(y)s_\mu(z)\end{aligned}$$

Die Behauptung folgt dann, wenn man die Koeffizienten von $s_\mu(z)$ an beiden Enden dieser Gleichungsketten vergleicht. □

Das Resultat von Satz 6.3 kann man auf n Mengen von Variablen verallgemeinern:

Lemma 6.4. *Seien $x^{(1)},\dots,x^{(n)}$ Mengen von Variablen, seien λ und μ Partitionen. Dann gilt*

$$s_{\lambda/\mu}(x^{(1)},\dots,x^{(n)}) = \sum_{(\nu)}\prod_{i=1}^n s_{\nu^{(i)}/\nu^{(i-1)}}(x^{(i)}) \tag{6.0.5}$$

summiert über alle Folgen $(\nu)=(\nu^{(0)},\nu^{(1)},\dots,\nu^{(n)})$ von Partitionen mit $\nu^{(0)}=\mu$, $\nu^{(n)}=\lambda$ und $\nu^{(0)}\subset\nu^{(1)}\subset\cdots\subset\nu^{(n)}$.

Als nächstes wenden wir Lemma 6.4 auf den Fall an, wo jede der Mengen $x^{(i)}$ nur aus einer Variablen x_i besteht. D.h. wir betrachten den Ausdruck $s_{\lambda/\mu}(x_1,\dots,x_n)$.

Im Falle eines einzelnen x sagt Lemma 6.2, dass $s_{\lambda/\mu}(x)=0$ ist, ausser wenn $\lambda-\mu$ ein horizontaler Streifen ist (siehe Abschnitt 2.3). Ist $\lambda-\mu$ ein horizontaler Streifen, so ist $s_{\lambda/\mu}(x)=|\lambda-\mu|$. Dann ist jedes der Produkte auf der rechten Seite von Lemma 6.4 ein Monom $x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n}$, für $\alpha_i=|\nu^{(i)}-\nu^{(i-1)}|$. Somit haben wir $s_{\lambda/\mu}(x_1,\dots,x_n)$ als Summe von Monomen x^α ausgedrückt, eines für jedes Tableau T der Gestalt $\lambda-\mu$.

Notation. Ist das Gewicht des Tableau T gleich $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$, so schreiben wir einfach x^T an Stelle von x_α.

Das alles ergibt als Anwendung von Lemma 6.4 die Aussage

Lemma 6.5. *Mit diesen Notationen ist*

$$s_{\lambda/\mu} = \sum_T x^T\,,$$

summiert über alle Tableaux T der Gestalt $\lambda-\mu$.

If there is time left here, one could add Pieri's formula once more, i.e. (5.16) - building up from (5.12) (page 73).

Als Folge von Lemma 6.5 kann man die Formel von Pieri beweisen und eine analoge Aussage über Produkte von Schurfunktionen mit e_r.

Korollar 6.6 (Formel von Pieri). *Sei μ eine Partition.*

(i) Es ist

$$s_\mu h_r = \sum_\lambda s_\lambda\,,$$

summiert über alle Partitionen λ derart, dass $\lambda - \mu$ ein horizontaler r-Streifen ist.

(ii) Es ist

$$s_\mu e_r = \sum_\lambda s_\lambda\,,$$

summiert über alle Partitionen λ derart, dass $\lambda - \mu$ ein vertikaler r-Streifen ist.

Beweis. Die Aussage (ii) folgt aus (i), indem man die Involution ω auf (i) anwendet.

Zu (i): Ist ν eine Partition vom Gewicht $|\nu| = |\lambda - \mu|$, so schreiben wir $K_{\lambda-\mu,\nu}$ für die Anzahl der Tableaux der Gestalt $\lambda - \mu$ und vom Gewicht ν. Wegen Lemma 6.5 haben wir

$$s_{\lambda/\mu} = \sum_\nu K_{\lambda-\mu,\nu} m_\nu$$

und damit ist

$$K_{\lambda-\mu,\nu} = \langle s_{\lambda/\mu}, h_\nu\rangle = \langle s_\lambda, s_\mu h_\nu\rangle$$

also

$$s_\mu h_\nu = \sum_\lambda K_{\lambda-\mu,\nu} s_\lambda\,.$$

Ist nun insbesondere $\nu = (r)$ eine Partition mit nur einem Teil ungleich Null, so ist $K_{\lambda-\mu,\nu} = 1$ oder $= 0$, je nachdem, ob $\lambda - \mu$ ein horizontaler r-Streifen ist oder nicht. Damit sind wir fertig. □

The following remark is not really necessary and can easily be dropped...

Bemerkung. Mit Hilfe von Lemma 6.5 kann man Schurfunktionen in der Abzählung von "plane partitions" (i.e. Unterteilungen von Zahlen in der Ebene) anwenden. Daher wird Lemma 6.5 in der Kombinatorik oft zur Definition von Schurfunktionen benutzt. Das hat den Vorteil, dass man mit einer einfachen expliziten Definition anfangen kann, der Nachteil ist jedoch, dass die Motivation für eine solche Definition nicht klar ist.

Zur Illustration hier noch ein Beispiel.

Beispiel 11. Sei $\lambda - \mu$ ein horizontaler Streifen. Dann gilt $s_{\lambda/\mu} = h_\nu = h_{\nu_1} h_{\nu_2} \cdots$, wobei die ν_i die Längen der Komponenten des horizontalen Streifens sind (dazu benutzt man Satz 6.1). Analog gilt: ist $\lambda - \mu$ ein vertikaler Streifen, so ist $s_{\lambda/\mu} = h_\nu = e_{\nu_1} e_{\nu_2} \cdots$, wobei die ν_i die Längen der Komponenten des Streifens sind.

7 Ausblick

Mögliche Fortsetzungen sind die folgenden Themen: Übergangsmatrizen, die Charaktere der symmetrischen Gruppe, die Regel von Littlewood-Richardson.

A Lösungen

Zu Aufgabe 1

Das folgt aus Satz 3.2.

Zu Aufgabe 2

Ist klar.

Zu Aufgabe 3

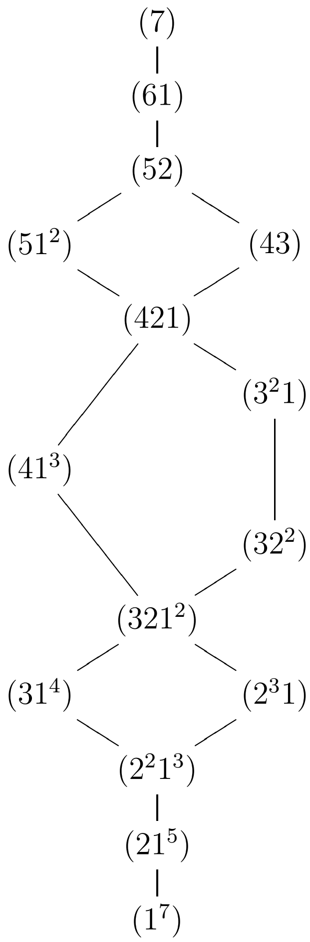
Teil 1) ist klar. Teil 2) nein, es reicht, die drei Zahlen 1, 2 und 3 im zweiten Bild zu betrachten (denn das ist ein Standard-Tableau für $\lambda - \mu$, dort können ja 2 und 3 zum Beispiel vertauscht werden.

Zu Aufgabe 4

Zu Aufgabe 5

$\mathcal{P}_n$:

$$\{(7),(6,1),(5,2),(5,1^2),(4,3),(4,2,1),(4,1^3),$$
$$(3^2,1),(3,2^2),(3,2,1^2),(3,1^4),(2^3,1),(2^2,1^3),(2,1^5),(1^7)\}$$



Zu Aufgabe 7

Zu Aufgabe 8

Zu Aufgabe 9

Zu Aufgabe 10

Zu Aufgabe 11

Literatur

[FH91] W. Fulton, J. Harris, *Representation theory. A first course*, Graduate Texts in Mathematics, 129. Springer-Verlag, New York, 1991.

[M98] I. Macdonald, *Symmetric functions and Hall polynomials*, Oxford Mathematical Monographs, 1998.

[Min] *Minoren und Cofaktoren*, Einführung auf Wikipedia, http://de.wikipedia.org/wiki/Minor_(Mathematik)

[Perm] *Permutation*, Einführung auf Wikipedia, http://de.wikipedia.org/wiki/Permutation