Übung 2

3c

Systeme: $\left.\begin{aligned} v_1 - 2v_2 &= \varepsilon_1 \\ -2v_1 + 3v_2 &= \varepsilon_2 \end{aligned}\right\} \star$

ABILDUNG: $L\begin{pmatrix}\varepsilon_1\\\varepsilon_2\end{pmatrix}$ = Lösung von $(\star)$ mit $\begin{pmatrix}\varepsilon_1\\\varepsilon_2\end{pmatrix}$ recht hande Seite

Sei $\begin{pmatrix}v_{1\varepsilon}\\v_{2\varepsilon}\end{pmatrix}$ ist die Lösung mit $\begin{pmatrix}\varepsilon_1\\\varepsilon_2\end{pmatrix}$ r.h.s

$\begin{pmatrix}v_{1\gamma}\\v_{2\gamma}\end{pmatrix}$ " " " ... $\begin{pmatrix}\gamma_1\\\gamma_2\end{pmatrix}$ r.h.s

Ist $L\left(\begin{pmatrix}\varepsilon_1\\\varepsilon_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\gamma_1\\\gamma_2\end{pmatrix}\right) \overset{?}{=} L\begin{pmatrix}\varepsilon_1\\\varepsilon_2\end{pmatrix} + L\begin{pmatrix}\gamma_1\\\gamma_2\end{pmatrix} \overset{?}{=} \begin{pmatrix}v_{1\varepsilon}\\v_{2\varepsilon}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}v_{1\gamma}\\v_{2\gamma}\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix}v_{1\varepsilon} + v_{1\gamma}\\v_{2\varepsilon} \quad v_{2\gamma}\end{pmatrix}$

Dasheist is $\begin{pmatrix}v_{1\varepsilon}+v_{1\gamma}\\v_{2\varepsilon}+v_{2\gamma}\end{pmatrix}$ die Lösung mit $\begin{pmatrix}\varepsilon_1+\gamma_1\\\varepsilon_2+\gamma_2\end{pmatrix}$ r.h.s von $(\star)$

Probe $\begin{cases} (v_{1\varepsilon}+v_{1\gamma}) - 2(v_{2\varepsilon}+v_{2\gamma}) = \underbrace{v_{1\varepsilon}-2v_{2\varepsilon}} + \underbrace{v_{1\gamma}-2v_{2\gamma}} = \varepsilon_1+\gamma_1 \\ -2(v_{1\varepsilon}+v_{1\gamma}) + 3(v_{2\varepsilon}+v_{2\gamma}) = \underbrace{-2v_{1\varepsilon}+3v_{2\varepsilon}} + \underbrace{-2v_{1\gamma}+3v_{2\gamma}} = \varepsilon_2+\gamma_2 \end{cases}$

So $L\left(\begin{pmatrix}\varepsilon_1\\\varepsilon_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\gamma_1\\\gamma_2\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}v_{1\varepsilon}+v_{1\gamma}\\v_{2\varepsilon}+v_{2\gamma}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}v_{1\varepsilon}\\v_{2\varepsilon}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}v_{1\gamma}\\v_{2\gamma}\end{pmatrix} = L\begin{pmatrix}\varepsilon_1\\\varepsilon_2\end{pmatrix} + L\begin{pmatrix}\gamma_1\\\gamma_2\end{pmatrix}$

$L\left(\alpha\begin{pmatrix}\varepsilon_1\\\varepsilon_2\end{pmatrix}\right) \overset{?}{=} \alpha L\begin{pmatrix}\varepsilon_1\\\varepsilon_2\end{pmatrix}$ Zeigen gleiche!

4) $x\begin{pmatrix}1\\ \lambda\\ \lambda\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}\lambda\\ \lambda\\ -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ Lin. unab. $\Rightarrow x = y = 0$

$\Rightarrow \quad x + \lambda y = 0 \quad (1)$

$x\lambda + y\lambda = 0 \quad (2)$

$x\lambda - y = 0 \quad (3)$

Zwei Fälle $\lambda = 0$, $\lambda \neq 0$

(I) $\lambda = 0 \overset{(1)}{\Longrightarrow} x = 0$
$\lambda = 0 \overset{(3)}{\Longrightarrow} y = 0$ so Lin. unab.

(II) $\lambda \neq 0 \overset{(1)}{\Longrightarrow} y = -\frac{1}{\lambda}x$
$\lambda \neq 0 \overset{(3)}{\Longrightarrow} y = \lambda x$

$-\frac{1}{\lambda}x = \lambda x$

$\Rightarrow -x = \lambda^2 x$

$\Rightarrow \lambda^2 x + x = 0$

$x(\lambda^2+1) = 0$

für reellen Zahlen:

$A \cdot B = 0 \Rightarrow A = 0$ oder $B = 0$ (oder beides)

So $x(\lambda^2+1) = 0 \Rightarrow \boxed{x=0}$ oder $\lambda^2+1=0$

$\Rightarrow \lambda^2 = -1$ nicht moglich fur $\lambda \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow x = 0$

$\overset{(3)}{\Longrightarrow} y = 0$

So Lin. unab.