6. Gegeben $M = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \right\} \subset R^3$ (*)

Zeigen das diesen 3 Vektoren lin. ab. sind.

Merken: Teilweise jeden 2 vectoren in M sind Lin. unab. oder wir sind fertig. Warum?

und so z.B $x \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow x = y = 0$ mussen haben

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 x + b_1 y = 0 & (1) \\ a_2 x + b_2 y = 0 & (2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow a_1 \cdot (2) - a_2 \cdot (1) = \begin{cases} a_1 x + b_1 y = 0 \\ 0 + (b_2 a_1 - a_2 b_1) y = 0 \end{cases}$$

aber $(b_2 a_1 - a_2 b_1) y = 0$ wir mussen $y = 0$

$$\Rightarrow \boxed{b_2 a_1 - a_2 b_1 \neq 0}$$

Gleichweise $\boxed{c_2 a_1 - c_1 a_2 \neq 0}$

Lin abh $\Rightarrow$

So wenn $x \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = 0$ wir musse schauen nicht alle $x, y, z \neq 0$

Sei $a_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$, $b_1 \neq 0$, $b_2 \neq 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = 0 & (1) \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = 0 & (2) \end{cases}$$

$$a_1 \cdot (2) - a_2 \cdot (1) \Rightarrow \begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = 0 \\ 0 + (b_2 a_1 - b_1 a_2) y + (c_2 a_1 - c_1 a_2) z = 0 \end{cases}$$

aber $b_2 a_1 - a_1 b_2 \neq 0$, $c_2 a_1 - c_1 a_2 \neq 0$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{-(c_2 a_1 - c_1 a_2)}{(b_2 a_1 - b_1 a_2)} z$$

z ist Free

$$x = \frac{-b_1}{a_1} \left(\frac{-c_2 a_1 - c_1 c_2}{b_2 a_1 - b_1 a_2} \right) z + \frac{c_1 z}{a_1}$$

Jetzt anderen Fälle $a_1 = 0$ etc ...... schauen