Übung 9-2

Sei $F: \mathcal{L}(V,W) \to M_{m\times n}$ wobei

$F(l) = m$ und m ist die matrix rep. von linear abbildung l.

Sei $\dim V = n$, $\dim W = k$, $\{e_i\}_{i=1\ldots n}$ basis für V, $\{f_j\}_{j=1\ldots m}$ für W

Zeigen F ist einen Isomorphismus von $\mathcal{L}$ bis M

(i) Die Abbildung F ist $\boxed{\text{eineindeutig}}$ auf grund eine lineare Abbildung l vollständig durch ihre Werte auf einer Basis bestimmt ist.

(ii) Die Abbildung $\boxed{F \text{ ist auf } M}$ weil jede Matrix $m \in M$ das bild des linearen Abbildung $l(e_i) = \sum_{j=1}^{m} m_{ij} f_i$ $i=1\ldots n$ ist, und $(m_{ij}) = m^t$, $\{e_i\}$ basis für V, $\{f_j\}$ basis für W.

(iii) Sei $l_1(e_i) = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} f_j$, $l_2(e_i) = \sum_{j=1}^{m} b_{ij} f_j$ $i=1\ldots n$

und $l_1 \in \mathcal{L}$, $l_2 \in \mathcal{L}$. Sei $A = \underbrace{(a_{ij})}_{\text{matrix}}$ $B = \underbrace{(b_{ij})}_{\text{matrix}}$ $\begin{matrix} i=1\ldots n \\ j=1\ldots m \end{matrix}$

dann $[l_1] = A^t$ $[l_2] = B^t$

auch für $i=1\ldots n$: $(l_1+l_2)(e_i) = l_1(e_i) + l_2(e_i) = \sum_{i=1}^{m} (a_{ij}+b_{ij}) f_j$

aber $A+B = \overset{\text{matrix}}{(a_{ij}+b_{ij})}_{i=1\ldots n,\, j=1\ldots m}$ und $[l_1+l_2] = (A+B)^t = A^t + B^t = [l_1]+[l_2]$

und so mit $\left\{ \begin{aligned} A^t+B^t &= [l_1]+[l_2] \\ &= [l_1+l_2] \end{aligned} \right.$ $\Rightarrow F(l_1+l_2) = [l_1+l_2] = [l_1]+[l_2]$

$\Rightarrow \boxed{F(l_1+l_2) = F(l_1) + F(l_2)}$

(iv) Zeigen in gleiche weg $\boxed{F(kl_1) = k\,F(l_1)}$

dann i, ii, iii, iv $\Rightarrow$ F ist eine Isomorphismus $\mathcal{L} \Rightarrow M$