Übung 8 #3

Der letzte Punkt zum darzustellen:

wenn Bild(f) ist endlich dann

die Menge $\{f, f^2, f^3 \ldots\}$ Lin abh ist.

(i) Bild(f) endlich $\Rightarrow f : \mathbb{R} \to \{a_1, a_2 \ldots a_n\}$

(ii) $\{f, f^2, \ldots\}$ Lin Abh. bedeutet dass für etwas m

$\{f, f^2 \ldots f^m\}$ Lin abh ist.

$\Longleftrightarrow \exists\ \alpha_i$ so dass $\alpha_1 f + \alpha_2 f^2 + \ldots \alpha_m f^m \equiv 0 \quad \forall x$

oder $\alpha_1 f(x) + \alpha_2 f(x)^2 + \ldots \alpha_m f(x)^m \equiv 0 \quad \forall x$

und $\alpha_i \neq 0$ für alle $i = 1 \ldots m$

So nehmen $\alpha_1 f + \alpha_2 f^2 + \ldots \alpha_n f^{n+1} = f(\alpha_1 + \alpha_2 f + \ldots \alpha_n f^{n+1})$ ★

und die folgende polynom $\boxed{p(y) = (y - a_1)(y - a_2) \cdot \ldots (y - a_n)}$

sei $y = f(x) \Rightarrow (f(x) - a_1)(f(x) - a_2) \cdot \ldots \cdot (f(x) - a_n) \equiv 0 \quad \forall x$!

und multiplizieren $\Rightarrow B_1 + B_2 f(x) + B_3 f(x)^2 + \ldots B_n f(x)^n \equiv 0 \ \forall x$ warum?

aufgrund ~~aber~~ $B_1 + B_2 y + \ldots B_n y^n = 0$ hat n Lösungen $a_1 \ldots a_n$

und $\forall x \ f(x) = a_1$ oder a_2 oder $\ldots a_n$!

aber nicht alle $B_i = 0$ aufgrund B_i = produkt verschieden a_i

und so $\Rightarrow B_1 + B_2 f + B_3 f^2 + \ldots B_{n-1} f^{n-1} + f^n \equiv 0$, $B_i \neq 0 \ \forall i$

so $\{f_i\}$ Lin abh sind.

dass heißt: (★) $f(B_1 + B_2 f + \ldots B_{n-1} f^{n-1} + f^n) \equiv 0$

$= B_1 f + B_2 f^2 + \ldots B_{n-1} f^n + f^{n+1} \equiv 0 \ \forall x$

$B_i \neq 0 \quad i = 1 \ldots n+1$