4b $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 0$ für jede $i = 1 \ldots m$ $(\star)$

Spalten Vektoren Menge $M = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \ldots \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \right\}$

Zeigen M Linear abhängig ist.

Probieren: $\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \ldots + \lambda_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = 0$ $(\star\star)$

Sei $\lambda_1 = \lambda_2 \cdots = \lambda_n = 1$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 a_{11} \\ \lambda_1 a_{21} \\ \vdots \\ \lambda_1 a_{m1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_2 a_{12} \\ \lambda_2 a_{22} \\ \vdots \\ \lambda_2 a_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} \lambda_n a_{1n} \\ \lambda_n a_{2n} \\ \vdots \\ \lambda_n a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} + a_{12} + \cdots a_{1n} \\ a_{21} + a_{22} + \cdots a_{2n} \\ \vdots \\ a_{m1} + a_{m2} + \cdots a_{mn} \end{pmatrix} \overset{(\star)}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

So $(\star\star)$ ist wahr aber nicht alle $\lambda_i = 0$ so

M Lin Ab ist.

4d) Gegeben $M = \{v_1, v_2 \ldots\ldots v_p\}$ $v_j \in V$ vektorraum
und M ist lineare Unabhängig (*)

Konstruieren Teilmenge $W = \{v_{i1}, v_{i2} \ldots v_{im}\}$ $m \leq p$

$\boxed{\text{Wenn } W \text{ lin abhängig}}$ $\Rightarrow$ es gibt $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_m$

So dass $\lambda_1 v_{i1} + \lambda_2 v_{i2} + \ldots \lambda_m v_{im} = 0$

aber nicht alle $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_m = 0$

dann $\underbrace{\lambda_1 v_{i1} + \lambda_2 v_{i2} + \ldots \lambda_m v_{im}}_{W \text{ vekteren}} + \underbrace{\lambda_{m+1} v_{im+1} \ldots \lambda_p v_p}_{M-W \text{ vekteren}} = 0$

ist moglich mit $\lambda_{m+1} = \lambda_{m+2} = \ldots \lambda_p = 0$

und $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_m$ nicht alle 0

So W würden lin. abhängig sein $\Rightarrow M$ lin abhängig

Widerspruche von (*)

So $\boxed{W \text{ muss Lineare Unabhängig sein}}$

Beispiel von Widerspruchbeweis

Zeigen $A \Rightarrow B$ und A ist wahr

nicht Annehmen, dass B wahr ist

Konstruieren ein Widerspruch