Ubung 11 Problem 4

Wir haben in Klass gezeigt dass die folgende Kette wahr ist:

(*) $\text{Kern} A \subset \text{Kern} A^2 \subset \ldots \subset \text{Kern} A^k \subseteq \text{Kern} A^{k+1} \subseteq \ldots$ unendlich

Lassen Sie dieses Symbol "$A \subsetneq B$" darstellen, dass der Menge A ein Teilmenge von B ist und A kleiner als B ist.

Merken für Unterraume A, B: $A \subsetneq B \Rightarrow \dim A < \dim B$

Nun $\text{Kern} A^k$ ist ein Unterraum von $\mathbb{R}^n$.

In Kette (*) ist es höchstens möglich $\underline{n}$ Mal, die $\text{Kern} A^m \subsetneq \text{Kern} A^{m+1}$ weil in jedem Fall muss die dimension von des grosseren Unterraum ~~am~~ $\underline{\underline{\text{ein}}}$ mindestens mehr als der kleiner Unterraum sein

ABER: $\dim \text{Kern} \, A^m \leq n = \dim \mathbb{R}^n$!

So nach am meistens n mal Erweiterung $\exists \, k_0$:).

$$\dim \text{Kern} A^{k_0} = \dim \text{Kern} A^{k_0+1} = \ldots \text{ unendlich}$$

So auf grund $\text{Kern} A^m \subset \text{Kern} A^{m+1} \quad \forall m$

$$\Rightarrow \text{Kern} A^{k_0} = \text{Kern} A^{k_0+1} \ldots\ldots$$

Notizieren $\dim \text{Kern} A^{k_0}$ kann weniger als n sein, aber die Erweiterung muss stoppen.

Argument ist Gleich für Bild(A)!