2) Zeigen wenn f ist linear und g ist linear dann (i) $f+g$ ist linear
(ii) $\bar{k}f$ ist linear

$\boxed{\begin{array}{l}\text{Sei:}\\ a,b\in V\\ c,k,\bar{k}\in K\end{array}}$

(i) (a) $(f+g)(a+b) \overset{\text{def } "+"}{=} f(a+b)+g(a+b) \overset{f,g \text{ linear}}{=} f(a)+f(b)+g(a)+g(b)$
$= f(a)+g(a)+f(b)+g(b)$
$\overset{\text{def}}{=} (f+g)(a)+(f+g)(b)$

in K, in V, in V

(b) $(f+g)(k\cdot a) \overset{\text{def}}{=} f(ka)+g(k\cdot a)$
$\overset{g,f \text{ linear}}{=} k f(a) + k g(a)$
$\overset{\text{def}}{=} (k\cdot(f+g))(a)$

(ii) (a) $(\bar{k}\cdot f)(a+b) \overset{\text{def "·"}}{=} \bar{k}\cdot f(a+b) \overset{f \text{ linear}}{=} \bar{k}[f(a)+f(b)]$
$= \bar{k}f(a)+\bar{k}f(b)$
$= (\bar{k}\cdot f)(a)+(\bar{k}f)(b)$

$\in K$, V

(b) $(\bar{k}\cdot f)(c\cdot a) \overset{\text{def}}{=} \bar{k}\cdot f(ca) \overset{f \text{ linear}}{=} \bar{k}\cdot c\cdot f(a)$
$= c\cdot\bar{k}f(a)$
$= c(\bar{k}f)(a)$

So wenn f,g sind linear
So $f+g$, $\bar{k}f$ sind linear ~~und~~ so
$\Rightarrow \{f\in X \mid f \text{ ist linear}\}$ ist einen Unterraum von X. (Klar nicht lehr menge)

Merken: h ist linear $\Leftrightarrow$ $h(a+b) = h(a)+h(b)$ (a)
$\underline{\underline{\text{und}}}$ $h(k\cdot a) = k\cdot h(a)$ (b)

wobei: $a,b\in V$ (vector Raum)
$k\in K$ (korper)
$h\in X$

3) In einen Vektorraum mussen wir ein "null Element" haben ($\vec{0}+\vec{v}=\vec{v}\ \forall \vec{v}$).
Dieses Element in $\mathbb{R}^2$ ist $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$;
aber $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \notin M = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \middle| x+3y=4\right\}$
aufgrund $\overset{x}{0}\overset{+}{+}\overset{3y}{3(0)} = 0 \neq 4$, so M nicht Vektorraum

oder Sei $A=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$; ist $A+B\in M$ wenn $A,B\in M$
nein: $A+B=\begin{pmatrix}a_1+b_1\\a_2+b_2\end{pmatrix}$ aber $\overset{x}{(a_1+b_1)}\overset{+}{+}\overset{3y}{3(a_2+b_2)}$
$= \underbrace{a_1+3a_2}_{4} \underset{+}{+} \underbrace{b_1+3b_2}_{4} = 8 \neq 4$

4) $W_1+W_2 = \{\vec{v_1}+\vec{v_2} \mid \vec{v_1}\in W_1, \vec{v_2}\in W_2\}$
Summe ist direkt nur wenn jedes Element in W_1+W_2 kann nur auf eine Art und Weise (ein weg) geschrieben werden.
$\Leftrightarrow W_1\cap W_2 = \vec{0}$

so Sei $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\in W_1\cap W_2 \Rightarrow \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{b=0}$
and ach $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y\\y\end{pmatrix} \Rightarrow y=b=0$
$\Rightarrow a=0$
so $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

oder Sei $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\in W_1\cancel{+}W_2 \Rightarrow \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}y\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+y\\y\end{pmatrix}$
Sei auch $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}m\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}n\\n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}m+n\\n\end{pmatrix}$
$\Rightarrow \begin{pmatrix}m+n\\n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+y\\y\end{pmatrix} \Rightarrow n=y \Rightarrow m+n = x+y$
$\Rightarrow m=x$
so $m=x$, $y=n \Rightarrow$ ein weg zu screiben!

5) Merken Sie das $\begin{pmatrix}3\\9\\6\\3\end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix}1\\3\\2\\1\end{pmatrix}$

So wir konnen schreiben

$$\underset{=}{-3}\begin{pmatrix}1\\3\\2\\1\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}2\\7\\4\\7\end{pmatrix} + \underset{=}{3}\begin{pmatrix}1\\3\\2\\1\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}3\\5\\7\\7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ nicht alle koefficients $= 0$!

$\boxed{\text{So nicht linear unabhängig}}$