Sei $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ eine lineare Abbildung gegeben durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & -2 \\ 3 & 6 & 3 & -7 \end{pmatrix}$$

bezüglich beliebiger Basen des $\mathbb{R}^3$ bzw. $\mathbb{R}^4$. Die Zeilen von A gesehen als Vektoren im $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix}$$

spannen eine Unterraum des $\mathbb{R}^4$ auf, den sogenannten *Zeilenraum* von A. Wendet man auf A elementare Zeilenumformungen an, d.h.

1. Vertauschen von zwei Zeilen,
2. Multiplikation einer Zeile mit $k \neq 0$, oder
3. das k-fache einer Zeile zu einer anderen dazu addieren, wobei $k \neq 0$,

so erhält man eine Matrix B. Z.B.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & -2 \\ 3 & 6 & 3 & -7 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -8 \\ 0 & 0 & 6 & -16 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =: B$$

Dann ist jede Zeile von B genau eine Zeile von A oder eine Linearkombination von Zeilen von A. Folglich ist der Zeilenraum von B im Zeilenraum von A enthalten. Andererseits kann man die inversen elementaren Zeilenumformungen auf B anwenden und erhält A; folglich ist der Zeilenraum von A in B enthalten. Das bedeutet A und B haben den gleichen Zeilenraum.
Eine Basis $\mathcal{B}$ des Zeilenraumes von A (und B) läßt sich somit leicht von B ablesen, nämlich

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ -8 \end{pmatrix} \right\}$$

Anolog spannen die Spaltenvektoren von A als Vektoren im $\mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -7 \end{pmatrix}$$

einen Unterraum des $\mathbb{R}^3$ auf, den sogenannten *Spaltenraum* von A. Wendet man auf A elementare **Spaltenumformungen** an, d.h.

1. Vertauschen von zwei Spalten,
2. Multiplikation einer Spalte mit $k \neq 0$, oder
3. das k-fache einer Spalte zu einer anderen dazu addieren, wobei $k \neq 0$,

so erhält man eine Matrix $\widetilde{B}$, die wie oben den gleichen Spaltenraum wie A besitzt. Z.B.

$$\begin{aligned} A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & -2 \\ 3 & 6 & 3 & -7 \end{pmatrix} &\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 3 & -7 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 6 & 3 & -7 \end{pmatrix} \\ &\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 6 & 2 & -7 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -7 \end{pmatrix} =: \widetilde{B} \end{aligned}$$

Eine Basis $\widetilde{\mathcal{B}}$ des Spaltenraumes von A (und $\widetilde{B}$) läßt sich somit leicht von $\widetilde{B}$ ablesen, nämlich

$$\widetilde{\mathcal{B}} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -7 \end{pmatrix} \right\}$$

Äquivalent (Sehen Sie Raume TEIL 1) kann man auch elementare Zeilenumformungen auf

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ -1 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & -7 \end{pmatrix}$$

anwenden, um die Matrix B' zu erhalten, deren Zeilen den gleichen Spaltenraum aufspannen, wie den von A. Z.B.

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ -1 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & -7 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & -8 & -16 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -8 & 16 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =: B'$$

Eine Basis $\mathcal{B}'$ des Spaltennraumes von A läßt sich somit leicht von B' ablesen, nämlich

$$\mathcal{B}' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

Man beachte, dass

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{8}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -7 \end{pmatrix}$$