UE Lineare Algebra I, Wintersemester 2007/2008

Klausur 2 Übungsblatt: spezielle Räume Zusammenfassung

- Die 4×4 Matrix A sei bezüglich einer beliebigen Basis vom $\mathbb{R}^4$ gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Dann gilt:

1. Dimension des Spaltenraumes = Dimension des Zeilenraumes = Rang von A.
2. Bild A = Spaltenraum A.
3. $\dim \text{Kern } A + \dim \text{Bild } A = \dim \mathbb{R}^4 = 4$.

- Warum ist Bild A = Spaltenraum von A?

Der Vektor $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$ liegt genau dann in Bild A, wenn es einen Vektor $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ gibt, so dass $Ax = y$ gilt. D.h.

$$\begin{aligned} Ax &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \\ &= x_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Wie man sieht, ist Bild A von $\mathbb{R}^4$ genau die lineare Hülle der Spaltenvektoren von A.

- Mit Gauss Elimination bringt man A auf Staffelform:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B$$

Was können wir von der Staffelform B von A ablesen?

1. Drei linear unabhängige Zeilen

$$\begin{aligned} \Rightarrow 3 &= \text{Rang } A \\ &= \text{Dimension des Zeilenraumes von } A \\ &= \text{Dimension des Spaltenraumes von } A \\ &= \text{Dimension von Bild } A \end{aligned} \quad .$$

2. Ausserdem folgt

$$\begin{aligned} \text{Dimension Kern } A = 1 & \qquad \text{(Da man eine Variable frei wählen kann)} \\ = 4 - \text{Dimension von Bild } A & \qquad \text{(Dimensionsformel!)} \end{aligned}$$

3. Eine Basis des Zeilenraumes von A bilden die drei nicht null verschiedenen Zeilen von B.

4. In dieser Form (d.h. von B) können wir NICHT die Basis für den Spaltenraum oder von Bild A ablesen. Die 3 linear unäbhangig Spalten von B bilden KEINE Basis für den Spaltenraum. Wir haben die Staffelform B durch Zeilenumformungen aus A erhalten. Das bedeutet, die neuen Spalten sind keine Linearkombination von den Ausgangsspalten von A.

5. Um eine Basis für den Spaltenraum von A (= Bild A) zu finden, schreibt man die Spalten als Zeilen (also A^T), damit man Zeilenumformungen anwenden kann. Die linear unabhängigen Zeilen von dieser neuen Staffelformmatrix C ist eine Basis für den Spaltenraum A = Bild A. Dass heisst:

$$A^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = C$$