UE Lineare Algebra I, Wintersemester 2007/2008

Klausur 2 Übungsblatt, bis 18.01.2008

1. Gegeben ist die lineare Abildung $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert als $T(x, y, z) = (a_1x + a_2y + a_3z, b_1x + b_2y + b_3z, c_1x + c_2y + c_3z)$ mit Koeffizienten $a, b, c \in \mathbb{R}$. Finden die Matrixdarstellung bezüglich die Standardbasis:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

.

2. Gegeben sind die zwei Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \; v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

des $\mathbb{R}^4$. Ergänzen Sie v_1, v_2 zu einer Basis $[v_1, v_2, v_3, v_4]$ des $\mathbb{R}^4$.

3. Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die definiert mit $f = x^2$. Ist die Funktion injektiv? surjektiv (auf)? bijektiv?

4. Überlegen Sie sich, ob die Menge $\{\sin(x), \sin(x) + 1\}$ linear abhängig oder linear unabhängig im $\mathbb{R}$-Vektorraum aller Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ ist.

5. Für die R^4 gegebenen Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

   (a) Finden einen Basis fuï die Spalltenraum un Kern von A.

   (b) Finden Sie den Rank dieser Matrix.

6. $T : \mathbb{R} \to \; \mathbb{R}$ ist eine lineare Abildung mit Matrixdarstellung A bzgl. der Standardbasis.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

. Verwenden Sie die "Ubergansmatrix" und finden Sie die Matrixdarstellung bzgl. der neuen Basis W:

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

7. Sei V der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller Polynomfunktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ deren Grad ≤ 3 ist. Sei $d_i : V \to V$ die Abbildung, die jeder Polynomfunktion ihre i-te Ableitung zuordnet $(1 \leq i \leq 3)$. Finden Sie die Matrixdarstellung von d_i bzgl. der Basis $[1, x-1, x^2, x^3]$.

8. Es Sei U ein Unterraum des Vektorraums V mit endlicher Dimension. Zeige, dass ein Unterraum W von V existiert, so dass $V = U \oplus W$.

9. Zeigen dass die Summe $K(A)+B(A)$ direkt ist wobei. $K(A)$ und $B(A)$ sind definiert in Ubungsblatt 11.