Klausur 2

① 8pts: $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & -3 & -4 & 0 \\ -7 & 9 & 12 & 1 \end{pmatrix}$

② 10pts:

3pts Basis Kern: $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 7 & 3 \\ 3 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & -7 & -7 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to$ $x_4 = 0$, $x_3 = $ frei, $x_2 = -x_3$, $x_1 = -x_3$

$\boxed{\text{Basis } \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}}$

3pts Basis Bild: $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & 3 \\ 1 & 7 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 10 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{31}{11} & \frac{19}{10} \end{pmatrix}$

$\boxed{\text{Basis Bild} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 31 \\ 19 \end{pmatrix} \right\}}$

$\boxed{\text{Rang}(A) = \dim \text{Bild } A = 3}$

③ 8pts $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $\dim \mathbb{R}^n = n$

(*) SATZ: $\boxed{\dim \mathbb{R}^n = n = \dim \text{Kern } A + \dim \text{Bild } A}$

a) Sei A injektiv $\Rightarrow$ nur $A \cdot \vec{0} = \vec{0} \Rightarrow \text{Kern } A = \{\vec{0}\} \Rightarrow \dim \text{Kern } A = 0$

aber $n = \dim \text{Kern } A + \dim \text{Bild } A = 0 + \dim \text{Bild } A$

$\Rightarrow n = \dim \text{Bild } A \Rightarrow \text{Bild } A = \mathbb{R}^n \Rightarrow$ surjektive

b) Sei A surjektiv $\Rightarrow \text{Bild } A = \mathbb{R}^n \Rightarrow \dim \text{Bild } A = n$

$\Rightarrow \dim \text{Kern } A = 0 \Rightarrow \text{Kern } A = \{\vec{0}\}$

$\Rightarrow A$ injektive

so A injektive $\Leftrightarrow$ A surjektive

Definition Bijektiv $\Leftrightarrow$ surjektive und injektiv

④ 8pts $F\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (2, -6)$ $F\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (-3, 0)$, $F\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (1, 0)$

$F\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (0, 2)$ koordinaten standard $\mathbb{R}^2$

$\boxed{\text{So matrixdarstellung} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 0 \\ -6 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}$

5 $v_1 = \begin{pmatrix} 1+i \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix} -2-i \\ 1-3i \\ i \end{pmatrix}$ finden v_3 Basis $\mathbb{C}^3$
hier Korper ist $\mathbb{C}$

Sie können Gauss Reduktion benutzen

6pts

$$\begin{matrix} 1+i & -2 & 0 \\ -2-i & 1-3i & i \\ a & b & c \end{matrix} \Rightarrow$$ und nehmen a, b, c so in Staffel Form

oder zum Beispiel: finden $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ nicht Lin ab von v_1, v_2

dass heist wir wollen nicht $x\begin{pmatrix} 1+i \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} -2-i \\ 1-3i \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

So nehmen $c = 0 \Rightarrow y = 0$ für Lin abh

$\Rightarrow -2x = b$ für Lin abh

nehmen $b = 0 \Rightarrow x = 0$

So $\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist immer Lin unab von v_1, v_2 wenn $a \neq 0$

Probe $x\begin{pmatrix} 1+i \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} -2-i \\ 1-3i \\ i \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} (1)\; x(1+i) + y(-2-i) + az = 0 \\ (2)\; -2x + y(1-3i) + z \cdot 0 = 0 \\ (3)\; x \cdot 0 + yi + z \cdot 0 = 0 \end{cases}$$

(3) $\Rightarrow yi = 0 \Rightarrow y = 0$

(2) $\Rightarrow -2x = 0 \Rightarrow x = 0$

(1) $\Rightarrow z \cdot a = 0 \Rightarrow z = 0$ wenn $a \neq 0$

So Lin unab